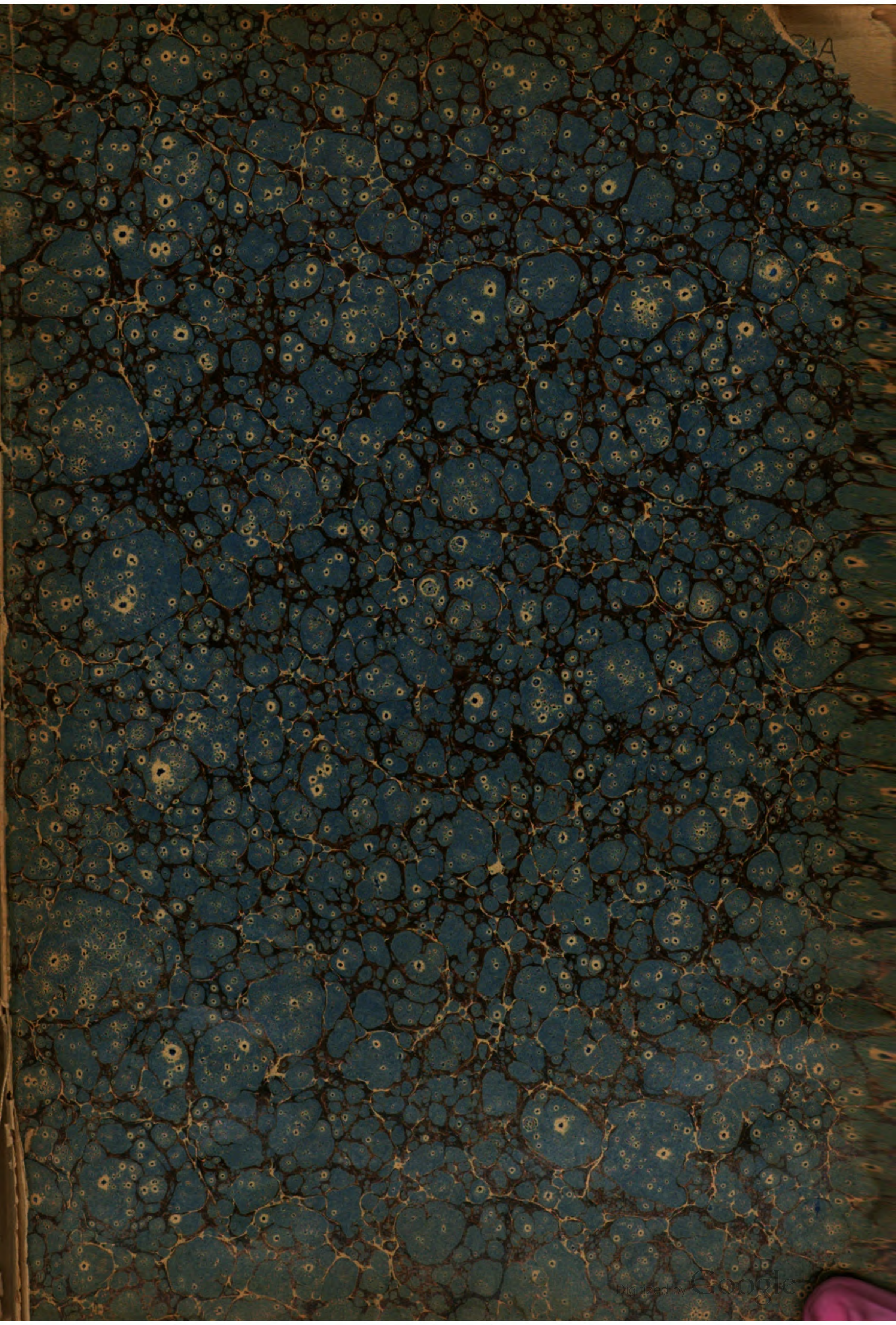




APPLICAZIONI GEOMETRICHE

DEL

CALCOLO INFINITESIMALE

Alexander Ziwet

APPLICAZIONI

GEOMETRICHE

DEL

CALCOLO INFINITESIMALE

PER

GIUSEPPE PEANO

INCARICATO DELLE APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL CALCOLO INFINITESIMALE
NELLA R. UNIVERSITÀ DI TORINO
PROFESSORE NELLA R. ACCADEMIA MILITARE



FRATELLI BOCCA EDITORI
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA
TORINO
FIRENZE ROMA NAPOLI

1887



Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

PREFAZIONE

Nel presente volume sono esposte le applicazioni fondamentali del Calcolo infinitesimale alla geometria, che da alcuni anni sviluppo nel mio corso all'Università.

Si è fatto uso in questo trattato di alcune operazioni sui segmenti, spiegate nell'Introduzione. Queste operazioni, sviluppate nel corrente secolo sotto diverse forme da varii illustri matematici, fra cui meritano menzione speciale Bellavitis [1]), Möbius [2]) e principalmente Hamilton [3]) e Grassmann [4]), compaiono già, più o meno ampiamente, in opere aventi scopo didattico, come nei corsi di Meccanica di Schell [5]) e Somoff [6]), nel corso di calcolo di Hoüel [7]), e altrove. Nel presente libro però non si fa uso che delle operazioni più semplici; i concetti introdotti si possono ridurre essenzialmente ai seguenti:

1° L'equipollenza di due segmenti (pag. 1). Si è assunto, per

---

1) Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, vol. 2° (1832) e vol. 5° (1835). Sposizione del metodo delle equipollenze — Memorie della società delle Scienze residente a Modena. Tomo XXV, parte 2ª (1854). Sulle origini del metodo delle equipollenze. — Memorie dell'Istituto Veneto: vol. XIX (1876).

2) Der Barycentrische Calcul (Leipzig 1827) — Ueber die Zusammensetzung gerader Linien ecc. (1844); Ges. Werke Bd. 1, pag. 601.

3) Lectures on Quaternions (Dublin 1853). — Elemente der Quaternionen, Deutsch von Glan (Leipzig 1882).

4) Ausdehnungslehre (1844) (2ª edizione 1878). — V. anche Hankel, Vorl. ü. die Complexen Zahlen (1867).

5) Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2ª edizione (1879).

6) Theoretische Mechanik, übersetzt von Ziwet (1878).

7) Cours de Calcul infinitésimal (Paris, 1878).

indicare l'equipollenza, il segno $\equiv$, il quale è tipograficamente più comodo di quello (≏) usato dal Bellavitis, o di quello ($\stackrel{*}{=}$) proposto dal Schell, e che, almeno in un primo studio, evita gli equivoci cui potrebbe dar luogo il segno $=$ adottato da Möbius, Grassmann, Hamilton, ed altri.

2° La somma geometrica, o composizione dei segmenti (pag. 4), analoga alla composizione delle traslazioni, velocità, ecc.

3° Il prodotto di due segmenti (pag. 6), indicato colla scrittura $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, cioè il prodotto delle lunghezze dei due segmenti pel coseno dell'angolo compreso. Questo prodotto è funzione simmetrica (o commutativa) dei due segmenti, e distributiva rispetto ad ogni fattore. Esso fu introdotto da Resal[1]) col nome di *prodotto geometrico*, e corrisponde a $-\mathrm{S}.\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ di Hamilton. Se il primo segmento rappresenta una forza, il secondo lo spostamento del punto materiale cui è applicata la forza, il prodotto dei due segmenti misura il lavoro della forza.

4° L'area $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ (pag. 17) cioè l'area del parallelogrammo costrutto sui due segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; e il volume $\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}$ del parallelepipedo compreso fra questi segmenti (pag. 24). L'area ed il volume sono funzioni alternate dei segmenti, e distributive rispetto ad ogni segmento. Queste notazioni sono dovute a Grassmann.

I segmenti così definiti possono essere funzioni di variabili numeriche, e ad essi si applicano i concetti di limite, derivate ordinarie, successive e parziali, la formula di Taylor, le funzioni interpolari, e così via, analogamente a quanto si fa per le funzioni numeriche. Gli stessi concetti si applicano alle aree e volumi variabili, e specialmente ai punti variabili. Se un punto è funzione d'una variabile t, e questa misura il tempo, la derivata prima del punto non è altro che la velocità, e la derivata seconda l'accelerazione del punto.

---

[1]) Traité de Cinématique pure (Paris 1862) pag. 64.

Lo studio delle curve e superficie resta agevolato da queste notazioni; le formule assumono forma più concisa; infine parecchi risultati, come quelli del Cap. IV, mal si saprebbero enunciare senza queste notazioni. La semplicità delle formule sarebbe aumentata, e il calcolo geometrico reso più potente, se si fossero fatte nuove convenzioni, le quali però ci avrebbero condotti al di là dei limiti prefissi in questa pubblicazione.

Si ebbe cura in questo trattato di ben definire il limite d'un punto, d'una retta, d'un piano (pag. 30) e d'una figura variabile (pag. 302); a proposito di questi limiti sono dimostrati alcuni teoremi. Queste definizioni e dimostrazioni mancano nei trattati comuni; pure, se esse si possono tralasciare in un primo studio, sono necessarie per una rigorosa trattazione delle questioni della geometria infinitesimale; poichè, come si dimostra p. e. che il limite d'un prodotto è eguale al prodotto dei limiti, si deve pure esaminare sotto quali condizioni p. e. l'intersezione di due superficie variabili abbia per limite l'intersezione dei limiti delle superficie. Inoltre queste definizioni permettono uno studio più accurato degli inviluppi di curve e superficie.

Nel Cap. IV sono studiate le funzioni numeriche della posizione d'un punto. La derivata d'una tale funzione è un segmento il cui valore assoluto fu chiamato dal Lamè[1]) *parametro differenziale di primo ordine*. Le proposizioni di questo capitolo permettono di risolvere in modo assai elegante i principali problemi riferentisi alle normali a curve e superficie, e ai massimi e minimi geometrici.

---

[1]) Leçons sur les coordonnées curvilignes (Paris 1859), pag. 6. In quest'opera non comparisce ancora il segmento, che qui si chiamò derivata, e che fu introdotto da Somoff o. c. I risultati di questo capitolo, già intravvisti da Leibniz (Math. Schriften, Berlin 1849, tomo VI, pag. 233), furono enunciati da Poinsot (Statique, Bruxelles, 1836, pag. 291).

Il Cap. V contiene le definizioni di lunghezze, aree, volumi, e le relative formule. Sonvi pure trattate alcune questioni generali sui campi di punti, sulle funzioni distributive di campi, e sugli integrali estesi a campi. Le formule d'approssimazione delle aree sono accompagnate dai rispettivi resti; questi furono recentemente ottenuti dal MANSION[1]).

Il concetto di polare d'una retta o d'un piano variabile in un punto, e le proposizioni relative a pag. 318-333 permettono di risolvere le seguenti questioni, e altre analoghe: Date le derivate (velocità) d'un sistema di punti variabili, trovare: 1°) il punto in cui una retta che unisce due punti del sistema tocca il proprio inviluppo, supposto che questa retta muovasi in un piano fisso; 2°) il piano tangente in un punto qualunque della superficie generata da una retta del sistema; 3°) le caratteristiche dei piani che uniscono a tre a tre i punti dati; 4°) le derivate dei punti d'incontro di queste rette e piani variabili, ecc.

In questo libro citai più volte il volume di Calcolo già da me pubblicato nel 1884. In quel volume io intrapresi a pubblicare, col permesso dell'illustre prof. sen. A. Genocchi, la prima parte del corso da questi dato nell'Università. Vi aggiunsi alcune proposizioni in parte estratte da varie opere, in parte mie ricerche originali. Parecchie di queste aggiunte sono contrassegnate o col mio nome, o col carattere di stampa più minuto, o dalla parola *esercizii;* non portano alcun segno quelle aventi i numeri 76-78, 91-96, 110, 112, 114, 116, 126, 152-155, 157-160, 162, 192, 206, 208. Queste aggiunte mi obbligarono ad alcune lievi modificazioni; quindi il libro pubblicato non rappresenta fedelmente le lezioni del prof. Genocchi, ma è un mio lavoro di compilazione. A questo proposito il prof. Genocchi pubblicò negli Annali di Ma-

[1]) Bulletin de l'Académie R. de Belgique 1886, pag. 293-307.

tematica (Serie 2ª, tomo XII) la seguente dichiarazione: « In « questi giorni i librai fratelli BOCCA hanno pubblicato un volume « intitolato *Calcolo differenziale e principii di Calcolo inte-* « *grale*... Perchè non mi si attribuisca ciò che non è mio, debbo « dichiarare che non ho avuto alcuna parte nella compilazione « dell'accennato volume, e che tutto è dovuto a quel giovine « egregio che è il Dottor GIUSEPPE PEANO, sottoscritto alla Prefa- « zione ed alle Annotazioni ». Quindi, benchè io abbia fatto largo uso delle lezioni del chiar.mo professore, mi assumo l'intera responsabilità di quanto sta scritto in quel libro, come se sul frontispizio del medesimo non comparisse altro nome che il mio.

Mi è grato infine esprimere i più vivi ringraziamenti al mio amico Gino Loria, professore di Geometria superiore nella R. Università di Genova, per la cura ch'egli ebbe nella correzione di questo libro.

INDICE ALFABETICO

(I numeri cardinali indicano le pagine, gli ordinali 1°, 2°, ecc. gli esercizi)

GEOMETRIA INFINITESIMALE

INTRODUZIONE

§ 1. Segmenti.

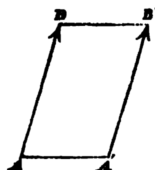
1. Il segmento rettilineo, che va da un punto A ad un punto B, considerato in lunghezza, direzione, e senso, è un ente geometrico, su cui si possono eseguire operazioni analoghe a quelle che si fanno sui numeri.

Rappresenteremo con AB il segmento che va di A in B; A è il punto iniziale, od *origine*, B il punto finale, o *termine*. Alcune volte indicheremo un segmento con una lettera sola, **a**, **b**,...; e sulla notazione del segmento segneremo un tratto rettilineo ($\overline{AB}$, $\overline{\mathbf{a}}$) ogni qual volta siavi pericolo di equivoco.

Due segmenti AB e A'B' diconsi *equipollenti*, e si scrive

$$AB \equiv A'B',$$

se essi hanno la stessa lunghezza, se le rette che li contengono hanno la stessa direzione, ossia sono parallele, e se essi sono percorsi nello stesso senso.



I segmenti AB e BA hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione, ma verso opposto; e si indica questo scrivendo

$$AB \equiv -BA.$$

Se i punti estremi d'un segmento coincidono, diremo che esso è nullo. Quindi la scrittura $AB \equiv 0$ esprime la coincidenza dei punti A e B. Un segmento nullo non ha direzione.

2. È chiaro che

Due segmenti equipollenti ad un terzo sono fra loro equipollenti.

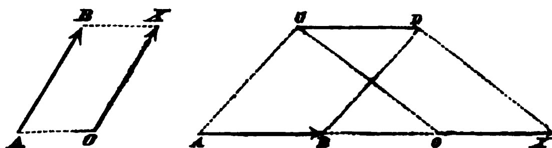
Se le rette AB e A′B′ sono parallele, e non coincidenti, e se le rette AA′ e BB′ sono pure parallele, i segmenti AB e A′B′ sono equipollenti, come pure i segmenti AA′ e BB′.

Problema. — Da un punto O come origine condurre un segmento OX equipollente ad un segmento dato AB.

Risolveremo questo problema, ammettendo le seguenti costruzioni:

1° Condurre la retta che unisce due punti dati.

2° Segnare la retta che passa per un punto dato, ed è parallela ad una retta data.

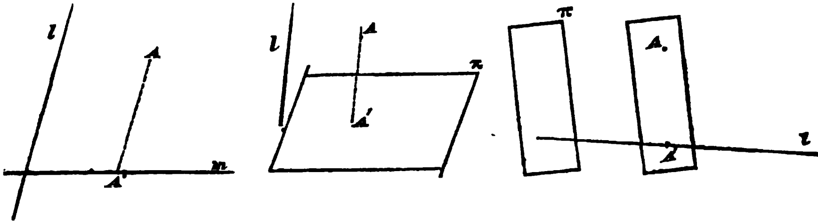


Se il punto O non è sulla direzione di AB, si segni per O la parallela OX ad AB; poi la AO, e la BX parallela ad AO, che incontri OX nel punto X. Il segmento OX è il segmento cercato. Infatti i segmenti AB e OX sono su rette parallele non coincidenti, e le rette AO e BX sono pure parallele; quindi $OX \equiv AB$.

Se il punto O si trova sulla retta AB, si prenda un punto C fuori della retta AB. Si costruisca $CD \equiv AB$, poi $OX \equiv CD$. Sarà $OX \equiv AB$, onde OX è il segmento cercato.

3. Ricorderemo le definizioni delle *proiezioni parallele*, che ci occorrono in seguito. Le proiezioni si possono fare nel piano, o nello spazio.

Nel piano, dicesi proiezione d'un punto A su d'una retta *m* fatta parallelamente ad una retta *l*, non parallela ad *m*, il punto d'intersezione colla *m* della retta condotta per A parallelamente ad *l*.



Nello spazio avremo a distinguere due specie di proiezioni.

Proiezione d'un punto A su d'un piano π, fatta parallelamente ad una retta *l* (non parallela a π) è il punto d'intersezione della parallela ad *l* condotta per A col piano π.

Proiezione d'un punto A su d'una retta *l*, fatta parallelamente ad un piano π, è il punto d'intersezione del piano parallelo a π condotto per A colla retta *l*.

Proiezione d'un segmento AB è il segmento che unisce le proiezioni di A e B.

Proiezione d'una figura formata da punti in numero limitato ed illimitato è la figura formata colle proiezioni dei punti della figura data.

Una proiezione dicesi *ortogonale* o *normale* se la retta o il piano parallelamente a cui si proietta è perpendicolare alla retta o al piano su cui si proietta.

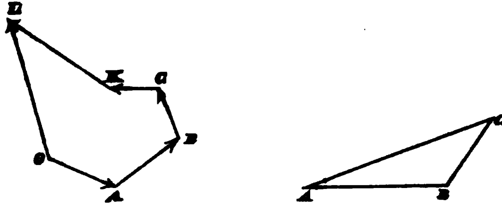
È noto che:

In proiezioni ortogonali, la lunghezza del segmento proiezione è eguale alla lunghezza del segmento proiettato moltiplicata pel coseno dell'angolo che questo fa colla sua proiezione.

Segmenti equipollenti hanno proiezioni equipollenti.

§ 2. Composizione di segmenti.

4. Se più segmenti OA, AB, BC, ... HK, KL sono contigui, ossia il termine dell'uno coincide coll'origine del successivo, si dice loro



somma geometrica il segmento OL che va dall'origine del primo al termine dell'ultimo; e si scrive

$$OL \equiv OA + AB + BC + \dots + KL.$$

Se in più segmenti contigui il termine dell'ultimo coincide coll'origine del primo, la loro somma è nulla; quindi essendo A e B due punti qualunque, sarà

$$AB + BA \equiv 0,$$

e se ABC sono tre punti qualunque,

$$AB + BC + CA \equiv 0,$$

e

$$AC \equiv AB + BC,$$

e

$$AC \equiv BC - BA.$$

Se i segmenti **a**, **b**, ... **k**, **l** sono dati comunque nello spazio, da un'origine arbitraria O si conduca il segmento OA $\equiv$ **a**; poi AB $\equiv$ **b**, e così via, HK $\equiv$ **k**, e KL $\equiv$ **l**. Il segmento OL, od un suo equipollente qualunque, si dirà la somma dei segmenti dati

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots + \mathbf{k} + \mathbf{l}.$$

Risulta dalle definizioni date che la somma geometrica dei seg-

menti OA ed OB è la diagonale OC del parallelogrammo costrutto su OA e OB; che la somma dei segmenti OA, OB e OC è la diagonale del parallelepipedo costrutto sugli spigoli OA, OB e OC.

I segmenti che si sommano chiamansi pure *componenti;* la loro somma geometrica *risultante*. All'operazione di determinare la somma geometrica di più segmenti si dà pure il nome di *composizione* dei segmenti.

Insegna la Meccanica che se i segmenti componenti rappresentano forze applicate ad un punto, la loro somma geometrica rappresenta la risultante di quelle forze, ossia quella forza che agendo da sola produce sul punto lo stesso effetto che tutte le altre forze insieme.

È chiaro che:

La somma geometrica di più segmenti è indipendente dall'ordine con cui questi si sommano.

La lunghezza della somma geometrica di più segmenti non è maggiore della somma delle lunghezze di questi segmenti.

5. Diremo che un segmento $\mathbf{b}$ è il prodotto d'un segmento $\mathbf{a}$ per un numero m (intero, o fratto o irrazionale, positivo o negativo), e scriveremo $\mathbf{b} \equiv m\mathbf{a}$, se i segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno la stessa direzione, se la ragione delle lunghezza di $\mathbf{b}$ alla lunghezza di $\mathbf{a}$ è rappresentata dal valore assoluto di m, e infine se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno lo stesso verso, quando m è positivo, ed hanno verso contrario quando m è negativo.

È chiaro che, essendo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, .. segmenti, ed m, n, .. numeri, si ha

$$(m + n + \ldots)\,\mathbf{a} \equiv m\mathbf{a} + n\mathbf{a} + \ldots$$

$$m(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) \equiv m\mathbf{a} + m\mathbf{b} + m\mathbf{c} + \ldots$$

e

$$(m + n)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \equiv m\mathbf{a} + n\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{b},$$

vale a dire ai prodotti di numeri per segmenti si possono applicare le regole che valgono pel prodotto di due numeri.

Intenderemo colla scrittura $\mathbf{a} : m \equiv \frac{\mathbf{a}}{m}$ il prodotto del segmento $\mathbf{a}$ pel numero $\frac{1}{m}$.

Così risulta ben definito il significato dell'espressione

$$m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} + ...,$$

ove **a**, **b**,... sono segmenti, ed m, n,... numeri; e questa espressione rappresenta un segmento.

È chiaro che i segmenti **a** e $m\mathbf{a}$ sono paralleli ad una stessa retta, e che i segmenti **a**, **b**, $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ sono paralleli ad uno stesso piano.

6. TEOREMA. — La proiezione della somma di più segmenti è la somma delle proiezioni di questi segmenti.

Siano **a** **b** **c** ... **l** i segmenti dati; **a**′ **b**′ ... **l**′ le loro proiezioni. Da un punto O si conduca $OA \equiv \mathbf{a}$, $AB \equiv \mathbf{b}$, ... $KL \equiv \mathbf{l}$. Sarà $OL \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b} + ... + \mathbf{l}$. Si proiettino i punti OAB...KL, e siano O′A′B′...K′L′ le loro proiezioni. Sarà $O'A' \equiv \mathbf{a}'$, $A'B' \equiv \mathbf{b}'$, ... $K'L' \equiv \mathbf{l}'$; e quindi $O'L' \equiv \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + ... + \mathbf{l}'$. Ma O′L′ è la proiezione di OL, dunque la proiezione della somma dei segmenti dati è la somma delle loro proiezioni.

TEOREMA. — Se la proiezione del segmento **a** è **a**′, la proiezione di $m\mathbf{a}$ è $m\mathbf{a}'$.

Invero, se $AB \equiv \mathbf{a}$, e $AC \equiv m\mathbf{a}$, e A′B′C′ sono le proiezioni di ABC, le rette ABC e A′B′C′ sono segate in questi punti da rette o piani paralleli alla retta, o al piano secondo cui si proietta. Quindi la ragione di A′C′ a A′B′ è eguale alla ragione di AC ad AB; e poichè $AC \equiv mAB$, si deduce $A'C' \equiv mA'B'$.

Da questi teoremi si deduce che se i segmenti **a**, **b**, ... hanno per proiezioni **a**′ **b**′ ..., il segmento $m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + ...$ ha per proiezione $m\mathbf{a}' + n\mathbf{b}' + ...$

§ 3. Prodotto di due segmenti.

7. Il prodotto dei numeri assoluti che misurano le lunghezze dei segmenti **a** e **b**, pel coseno dell'angolo che fanno le loro direzioni

e versi, vien detto prodotto dei segmenti **a** e **b**. Lo indicheremo con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esso è un numero. Se a e b sono le lunghezze dei segmenti, $\widehat{\mathbf{ab}}$ l'angolo che essi fanno, si ha:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \cos \widehat{\mathbf{ab}}.$$

Se i segmenti **a** e **b** hanno la stessa direzione, e lo stesso verso, $\cos \mathbf{ab} = 1$, e quindi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab$. Se hanno la stessa direzione, ma verso opposto, $\cos \mathbf{ab} = -1$, e quindi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -ab$.

Il prodotto di due segmenti è nullo quando, e solo quando è nullo uno dei due segmenti, ovvero essi sono ortogonali.

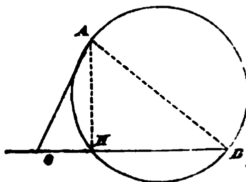
Il prodotto di due segmenti non si altera scambiando il loro ordine.

Il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è eguale al prodotto di **a** per la proiezione ortogonale su **a** di **b**, ovvero alla proiezione di **a** su **b** moltiplicato per **b**.

Porremo $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \times \mathbf{a}$, e lo chiameremo quadrato di **a**. Esso vale il quadrato della lunghezza di **a**.

Se da un punto O dello spazio si conduce una segante OMN ad una sfera di centro C, è noto che il prodotto $OM \times ON$ è costante, variando la segante, e dicesi potenza del punto O rispetto alla sfera C.

Il prodotto $OA \times OB$ è la potenza del punto O rispetto alla sfera di diametro AB. Infatti questa sfera incontri OB in H. L'angolo AHB è retto, quindi OH è la proiezione di OA su OB; e la potenza di O rispetto alla sfera, che vale $OH \times OB$ vale appunto il prodotto $OA \times OB$.



8. Il prodotto della somma geometrica di più segmenti per un segmento è eguale alla somma algebrica dei prodotti di quei segmenti per questo:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} + \mathbf{b} \times \mathbf{h} + \mathbf{c} \times \mathbf{h}.$$

Infatti si proiettino i segmenti **a**, **b**, **c** su **h**, e siano $\mathbf{a'b'c'}$ le loro proiezioni. Sarà $\mathbf{a'} + \mathbf{b'} + \mathbf{c'}$ la proiezione di $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, e

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \mathbf{a'} \times \mathbf{h}, \ \mathbf{b} \times \mathbf{h} = \mathbf{b'} \times \mathbf{h}, \ \mathbf{c} \times \mathbf{h} = \mathbf{c'} \times \mathbf{h},$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{h} = (\mathbf{a'} + \mathbf{b'} + \mathbf{c'}) \times \mathbf{h}.$$

Ora, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ ed $\mathbf{h}$ essendo segmenti di una stessa retta, si ha

$$(\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}') \times \mathbf{h} = \mathbf{a}' \times \mathbf{h} + \mathbf{b}' \times \mathbf{h} + \mathbf{c}' \times \mathbf{h},$$

e quindi

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} + \mathbf{b} \times \mathbf{h} + \mathbf{c} \times \mathbf{h}.$$

Da questo teorema si deducono formole, pei segmenti, analoghe a quelle pei numeri. Così si avrà

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') = \mathbf{a} \times \mathbf{a}' + \mathbf{a} \times \mathbf{b}' + \mathbf{b} \times \mathbf{a}' + \mathbf{b} \times \mathbf{b}'$$
$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b}^2.$$

Sia ABC un triangolo qualunque; si ha $AB = CB - CA$; quindi

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{CA} \times \overline{CB},$$

e detti a, b, c i numeri che misurano $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, e γ l'angolo che la direzione CA fa con CB si deduce:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

nota formula di trigonometria.

Si ha in modo analogo

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \times \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \times \mathbf{c};$$

Se ABCX sono quattro punti qualunque, si ha

$$\overline{AB} \times \overline{CX} + \overline{BC} \times \overline{AX} + \overline{CA} \times \overline{BX} = 0.$$

Infatti, ponendo invece di AB, BC, CA rispettivamente $BX - AX$, $CX - BX$, $AX - CX$, l'equazione precedente si riduce ad una identità.

§ 4. Coordinate di segmenti e di punti.

9. Se $\mathbf{i}$ è un segmento ed x un numero, il segmento $x\mathbf{i}$ è parallelo al segmento $\mathbf{i}$.

Viceversa, se $\mathbf{i}$ è un segmento non nullo, e se $\mathbf{a}$ è un segmento

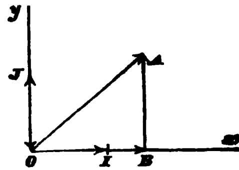
parallelo ad **i**, detto x il numero che rappresenta la ragione della lunghezza di **a** a quella di **i**, preso positivamente se **a** ed **i** hanno lo stesso senso, e negativamente se hanno senso opposto, sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i};$$

diremo che il numero x è la coordinata del segmento **a** parallelo ad **i**.

10. Se **i** e **j** sono due segmenti, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ove x ed y sono numeri, è pure un segmento, e questi tre segmenti sono paralleli ad un piano.

Viceversa, se tutti i segmenti che si considerano sono paralleli ad uno stesso piano, presine due **i** ed **j** non nulli, nè paralleli, ogni altro segmento **a** si può mettere sotto la forma $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Invero, fatto $OI \equiv \mathbf{i}$, $OJ \equiv \mathbf{j}$, $OA \equiv \mathbf{a}$, se **i**, **j**, **a** sono paralleli ad uno stesso piano, OI, OJ, OA sono contenuti in uno stesso piano. Sia AB la parallela ad OJ condotta per A, che incontri la OI in B. Sarà



$$OA \equiv OB + BA.$$

Ma, siccome OB ha la stessa direzione di $OI \equiv \mathbf{i}$, esisterà un numero x tale che $OB \equiv x\mathbf{i}$; e siccome BA ha la stessa direzione di $OJ \equiv \mathbf{j}$ esiste un numero y tale che $BA \equiv y\mathbf{j}$. Quindi

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

I numeri x ed y diconsi coordinate del segmento **a** rispetto ai segmenti **i** ed **j**.

11. Se infine i segmenti che si considerano sono disposti comunque nello spazio, fissati tre segmenti di riferimento **i**, **j**, **k**, nè nulli, nè paralleli ad uno stesso piano, ogni altro segmento **a** si può mettere sotto la forma

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

ove x, y, z sono tre numeri.

Infatti, fatto OI $\equiv$ **i**, OJ $\equiv$ **j**, OK $\equiv$ **k**, e OA $\equiv$ **a**, da A si conduca AB || OK, che incontri il piano IOJ in B; da B si conduca BC || OJ che incontri OI in C. Sarà:

$$OA \equiv OC + CB + BA.$$

Ma, poichè i segmenti OC, CB, BA sono paralleli ad **i**, **j**, **k**, esistono tre numeri x, y, z tali che

$$OC \equiv x\mathbf{i}, \ CB \equiv y\mathbf{j}, \ BA \equiv z\mathbf{k};$$

e quindi

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

I tre numeri x, y, z, dati i quali è determinato il segmento **a**, e che sono determinati quando sia dato **a**, diconsi coordinate del segmento **a**, rispetto ai segmenti di riferimento **i**, **j**, **k**.

Se i segmenti che si considerano partono tutti da un'origine fissa O, dato il segmento OA, risulta determinato il punto A, e viceversa, dato A, risulta determinato OA. Le coordinate del segmento OA si possono perciò chiamare le coordinate del punto A. Se i segmenti di riferimento OI, OJ, OK sono eguali all'unità di misura, queste coordinate sono le coordinate cartesiane di A, ove si prendano per assi cartesiani le rette OI, OJ, OK. E se questi segmenti, oltre all'essere eguali, sono ancora a due a due ortogonali, si hanno le coordinate cartesiane ortogonali.

12. Troveremo ora alcune relazioni fra le coordinate di segmenti, ed alcune formule di geometria analitica.

1. Se i segmenti **a** e **b**, hanno per coordinate x, y, z, e x', y', z', sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \ \mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k},$$

quindi

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \equiv (x + x')\,\mathbf{i} + (y + y')\,\mathbf{j} + (z + z')\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} - \mathbf{a} \equiv (x' - x)\,\mathbf{i} + (y' - y)\,\mathbf{j} + (z' - z)\,\mathbf{k},$$

ossia le coordinate della somma o differenza di due segmenti sono le somme o differenze delle coordinate di quei segmenti.

2. Se

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

si deduce

$$m\mathbf{a} \equiv mx\mathbf{i} + my\mathbf{j} + mz\mathbf{k},$$

e così si hanno le coordinate di $m\mathbf{a}$ conoscendo quelle di $\mathbf{a}$.

3. Se i punti A e B hanno per coordinate x, y, z e x', y', z', sarà

$$OA \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad OB \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k},$$

e $$AB \equiv OB - OA \equiv (x' - x)\,\mathbf{i} + (y' - y)\,\mathbf{j} + (z' - z)\,\mathbf{k},$$

e così si hanno le coordinate del segmento AB conoscendo le coordinate di A e di B.

4. Se $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, e $\mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, moltiplicando si ottiene

(1) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = xx'\mathbf{i}^2 + yy'\mathbf{j}^2 + zz'\mathbf{k}^2 +$$
$$+ (xy' + x'y)\,\mathbf{i} \times \mathbf{j} + (xz' + x'z)\,\mathbf{i} \times \mathbf{k} + (yz' + y'z)\,\mathbf{j} \times \mathbf{k};$$

questa formula esprime il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in funzione delle coordinate di $\mathbf{a}$ e di $\mathbf{b}$, e dei prodotti $\mathbf{i}^2$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, ecc., che sono determinati quando sono dati i segmenti di riferimento.

Se si prendono i segmenti di riferimento eguali all'unità, e ortogonali, si ha:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1,$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 0,$$

e quindi

(2) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = xx' + yy' + zz'.$$

5. Se il segmento $\mathbf{b}$ coincide con $\mathbf{a}$, il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ si riduce ad

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = (\text{lung. } \mathbf{a})^2,$$

e quindi dalla formula (1) si può ricavare la lunghezza d'un segmento, conoscendone le sue coordinate.

Supposti i segmenti di riferimento unitarii ed ortogonali, dalla (2) si ha

(3) $(\text{lung. } \mathbf{a})^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\text{lung. } \mathbf{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

formula che dà la lunghezza d'un segmento in funzione delle sue coordinate cartesiane ortogonali.

Come caso particolare, se i punti A e B hanno per coordinate cartesiane ortogonali x, y, z e x', y', z', si deduce

$$\text{lung. AB} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

6. Detti a e b i valori assoluti delle lunghezze di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e θ l'angolo che fanno questi segmenti, la formula (2) diventa

$$ab\cos\theta = xx' + yy' + zz',$$

e, risolvendola rispetto a $\cos\theta$, e sostituendo ad a e b i loro valori dati da (3), si ricava

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

che dà il coseno dell'angolo di due segmenti in funzione delle loro coordinate cartesiane ortogonali.

7. Siano $\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{i}'\ \mathbf{j}'\ \mathbf{k}'$ due terne di segmenti fondamentali. Supposte note le coordinate dei tre primi segmenti rispetto ai secondi:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &\equiv \alpha\mathbf{i}' + \beta\mathbf{j}' + \gamma\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} &\equiv \alpha'\mathbf{i}' + \beta'\mathbf{j}' + \gamma'\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} &\equiv \alpha''\mathbf{i}' + \beta''\mathbf{j}' + \gamma''\mathbf{k}', \end{aligned}$$

e conoscendo le coordinate del segmento $\mathbf{a}$ rispetto alla prima terna

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

si vogliono le coordinate di $\mathbf{a}$ rispetto alla seconda terna.

La questione si risolve immediatamente sostituendo in questa formula ad $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i loro valori. Si ottiene

$$\mathbf{a} \equiv (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z)\,\mathbf{i}' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)\,\mathbf{j}' + (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)\mathbf{k}',$$

ed i coefficienti di $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono le nuove coordinate di $\mathbf{a}$. Si vede di qui che le nuove coordinate sono funzioni lineari omogenee delle antiche.

§ 5. Applicazioni.

13. Per famigliarizzare il lettore al calcolo dei segmenti, tratteremo alcune questioni che si riferiscono ai baricentri.

Siano $A_1\ A_2 \dots A_n$ n punti dello spazio, cui siano affissi rispettivamente i numeri, o pesi $m_1\ m_2 \dots m_n$.

Sia O un punto dello spazio, e si calcoli la somma geometrica

$$\mathbf{s}(O) \equiv m_1 OA_1 + m_2 OA_2 + \dots + m_n OA_n\,,$$

che è un segmento, che dipende da O. Si vuol esaminare la legge con cui, variando questo segmento, varia O.

Sia S un altro punto dello spazio. Ricorrendo alla formula $OA \equiv OS + SA$, si ricava

$$m_1 OA_1 + m_2 OA_2 + \dots + m_n OA_n \equiv$$
$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n)\, OS + m_1 SA_1 + m_2 SA_2 + \dots + m_n SA_n\,,$$

ossia

$$(1) \qquad \mathbf{s}(O) \equiv (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\, OS + \mathbf{s}(S).$$

Se la somma numerica $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ non è nulla, si può determinare un punto S tale che, corrispondentemente ad esso, sia $\mathbf{s}(S) \equiv 0$. Invero, affinchè questo avvenga, è necessario e sufficiente che sia

$$\mathbf{s}(O) \equiv (m_1 + m_2 + \dots + m_n) OS\,,$$

da cui si ricava il segmento OS, e siccome O è fisso, risulta determinato il punto S.

Questo punto S, corrispondentemente al quale è nulla la somma geometrica $\mathbf{s}(S)$, dicesi *baricentro* dei punti dati coi pesi dati.

Supposto che nella formula (1) il punto S sia appunto il baricentro, essa diventa

$$\mathbf{s}(O) \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)OS,$$

ovvero

$$(2) \qquad m_1OA_1 + m_2OA_2 + ... + m_nOA_n \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)OS\,,$$

che esprime la somma dei segmenti variabili di sinistra in funzione del solo segmento variabile OS.

Se invece la somma $m_1 + m_2 + ... + m_n = 0$, la equipollenza (1) dice che $\mathbf{s}(O) \equiv \mathbf{s}(S)$, ossia la somma $\mathbf{s}(O)$ è indipendente dal punto O; e se corrispondentemente ad un punto dello spazio essa non è nulla, essa non sarà nulla per alcun altro punto; e se essa è nulla per uno, lo sarà per tutti.

14. Siano $x_r\ y_r\ z_r$ le coordinate del punto A_r, ed il punto arbitrario O sia l'origine delle coordinate. Allora

$$OA_r \equiv x_r\mathbf{i} + y_r\mathbf{j} + z_r\mathbf{k}\,,$$

e sostituendo nella formula (2), ed ordinando si ha

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_n x_n)\,\mathbf{i} + (m_1y_1 + m_2y_2 + ... + m_n y_n)\,\mathbf{j}$$
$$+ (m_1z_1 + m_2z_2 + ... + m_n z_n)\,\mathbf{k} \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)\,OS,$$

dalla quale si ricavano le coordinate del segmento OS, ossia del baricentro S; queste sono

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...},\quad \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...},\quad \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...}$$

Si proiettino i punti $A_1\ A_2\ ....\ A_n$ ed il loro baricentro S su d'un piano o su d'una retta; e segnamo con un accento le loro proiezioni. Poichè

$$m_1SA_1 + m_2SA_2 + ... + m_n\,SA_n \equiv 0\,,$$

si deduce

$$m_1S'A_1' + m_2S'A_2' + ... + m_n\,S'A_n' \equiv 0\,,$$

ossia la proiezione del baricentro S dei punti dati è il baricentro delle proiezioni di questi punti, ove alle proiezioni si affiggano gli stessi pesi.

Il baricentro S dei due punti A_1 e A_2 coi pesi m_1 e m_2 ($m_1 + m_2 \gtrless 0$) si trova sulla retta A_1A_2 e la divide in segmenti SA_1 ed SA_2 il cui rapporto è $-\frac{m_2}{m_1}$. Infatti si ha, per la definizione del baricentro $m_1SA_1 + m_2SA_2 \equiv 0$, ossia $SA_1 \equiv -\frac{m_2}{m_1} SA_2$, il che dice appunto quanto si voleva dimostrare. Reciprocamente ogni punto della retta $A_1 A_2$ si può considerare come il loro baricentro, purchè ad essi si affiggano pesi convenienti.

È pure facile lo scorgere che il baricentro S di tre punti A, B, C giace nel piano di questi punti; e viceversa, se S giace nel piano ABC, esso si può considerare come il baricentro dei punti A, B, C, ove a questi si affiggano pesi convenienti.

Se il gruppo di punti A_1 A_2 ... A_n coi pesi m_1 m_2 ... ha un baricentro S, ed il gruppo di punti A_{n+1} ... A_{n+p} coi pesi m_{n+1} ... m_{n+p} ha un baricentro S′, il baricentro S″ del sistema formato dai due gruppi di punti, coi rispettivi pesi, è il baricentro di S col peso $m_1 + m_2 ... + m_n$, e di S′ col peso $m_{n+1} + ... + m_{n+p}$. Invero si ha

$$(m_1 + m_2 + ... + m_n)OS \equiv m_1OA_1 + ... + m_nOA_n,$$
$$(m_{n+1} + ... + m_{n+p})OS' \equiv m_{n+1}OA_{n+1} + ... + m_{n+p}OA_{n+p},$$
$$(m_1 + ... + m_n + m_{n+1} + ... + m_{n+p})OS'' \equiv$$
$$m_1OA_1 + ... + m_nOA_n + m_{n+1}OA_{n+1} + ... + m_{n+p}OA_{n+p},$$

da cui si ricava:

$$(m_1 + ... + m_n + m_{n+1} + ... + m_{n+p})OS'' \equiv$$
$$(m_1 + ... + m_n)\,OS + (m_{n+1} + ... + m_{n+p})\,OS',$$

che dice appunto quanto si voleva dimostrare.

15. Siano ancora A_1 A_2 ... A_n punti dati, cui sono affissi i numeri, o pesi, m_1 m_2 ... m_n. Preso un punto O nello spazio, si consideri la

somma

$$\Sigma(O) = m_1\overline{OA_1}^2 + m_2\overline{OA_2}^2 + \ldots + m_n\overline{OA_n}^2,$$

ove con $\overline{OA}^2$ si intende il quadrato del numero che misura OA, vale a dire $OA \times OA$. Si vuol studiare il modo di variare di questa somma col variare di O.

Sia S un altro punto dello spazio. Ricorrendo alla formula $OA \equiv OS + SA$, si deduce:

$$m_1\overline{OA_1}^2 + m_2\overline{OA_2}^2 + \ldots + m_n\overline{OA_n}^2 = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overline{OS}^2 + \\ + 2(m_1SA_1 + m_2SA_2 + \ldots + m_nSA_n) \times OS + \\ + m_1\overline{SA_1}^2 + m_2\overline{SA_2}^2 + \ldots + m_n\overline{SA_n}^2.$$

Se ora $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ non è nullo, esiste il baricentro dei punti dati, colle masse date, e se S è questo baricentro, sarà

$$m_1SA_1 + m_2SA_2 + \ldots + m_nSA_n \equiv 0,$$

e la formula precedente si riduce a

$$\Sigma(O) = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overline{OS}^2 + \Sigma(S),$$

e così resta espressa la somma $\Sigma(O)$ in funzione del solo segmento OS variabile con O. Se $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ è positiva, $\Sigma(O)$ si riduce a $\Sigma(S)$ quando O coincide con S. Per ogni altra posizione di O sarà $\Sigma(O) > \Sigma(S)$; ossia, se la somma dei pesi è positiva, la somma $\Sigma(O)$ è minima quando O coincide col centro di gravità. Essa sarebbe massima se la somma dei pesi fosse negativa. Se il punto O varia, ma in modo che $\overline{OS}^2$ sia costante, ossia movendosi su d'una sfera di centro S, $\Sigma(O)$ si mantiene pure costante.

Se $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0$, la prima formula scritta diventa

$$\Sigma(O) = 2(m_1SA_1 + m_2SA_2 + \ldots) \times OS + \Sigma(S),$$

ovvero, fatto $s \equiv m_1SA_1 + m_2SA_2 + \ldots + m_nSA_n$, che è un segmento indipendente da S, si deduce

$$\Sigma(O) = 2s \times OS + \Sigma(S),$$

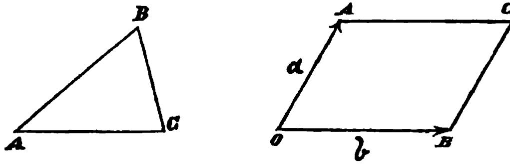
e quindi sarà $\Sigma(O) = \Sigma(S)$ tutte le volte che $s \times OS = 0$, ossia, se

s non è nullo, la somma $\sum(O)$ non si altera spostando il punto O in un piano perpendicolare ad **s**. Se infine $\mathbf{s} \equiv 0$, la somma $\sum(O)$ ha un valore costante per tutti i punti dello spazio.

§ 6. Aree.

16. L'area d'una figura piana, ove si consideri ad un tempo la sua grandezza, la giacitura del piano che la contiene, ed il verso in cui è percorso il suo perimetro, è un nuovo ente geometrico.

Indicheremo con ABC l'area del triangolo di vertici A, B, C, ed il cui perimetro sia percorso nell'ordine in cui sono segnati i vertici. Indicheremo con **a** . **b**, ove **a** e **b** sono due segmenti, l'area del pa-



rallelogrammo OACB, ove $OA \equiv \mathbf{a}$, e $OB \equiv \mathbf{b}$, ed il cui perimetro sia percorso nel verso del primo segmento $OA \equiv \mathbf{a}$, e quindi nel verso opposto al secondo. Il punto fra le due lettere **a** e **b** sta per separarle, e non indica una moltiplicazione, benchè l'operazione **a**.**b** abbia alcune proprietà della moltiplicazione.

In quanto segue considereremo specialmente le aree di parallelogrammi, o esprimibili con parallelogrammi.

Diremo che due aree piane α e β sono equipollenti, se hanno la stessa grandezza, se hanno la stessa giacitura, ossia se i loro piani sono paralleli, e se i perimetri delle due aree sono percorsi nello stesso verso, ossia, se una persona che li percorre amendue, mantenendosi sempre parallela a sè stessa, ha sempre a sua destra, od a sua sinistra l'interno dell'area. Indicheremo l' equipollenza scrivendo $\alpha \equiv \beta$.

Così è chiaro che i triangoli ABC, BCA, CAB sono equipollenti;

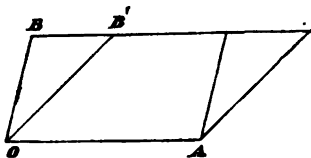
mentrechè i triangoli ACB, BAC, CBA, pure equipollenti fra loro, hanno la stessa grandezza dei tre primi, ma hanno verso opposto. Analogamente i parallelogrammi **a**.**b** e **b**.**a** hanno la stessa grandezza e giacitura, ma verso opposto. Indicheremo questo scrivendo

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv -\mathbf{b}.\mathbf{a}.$$

Se i segmenti **a** e **b** sono paralleli, sarà **a**.**b** $\equiv 0$. Viceversa, se **a**.**b** $\equiv 0$, è necessario e sufficiente che o i segmenti siano paralleli, ovvero che uno di essi sia nullo. Come caso speciale, se **a** è un segmento qualunque, sarà sempre **a**.**a** $\equiv 0$.

17. È noto che

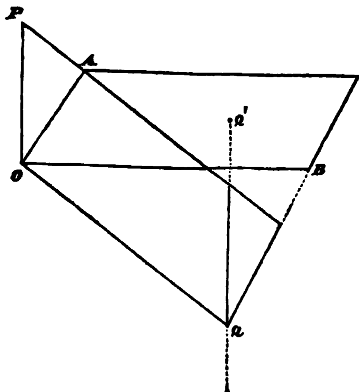
Due aree equipollenti ad una terza sono fra loro equipollenti.



Se i parallelogrammi OA.OB e OA.OB′ hanno un segmento OA comune, e sono compresi fra le rette OA e BB′ parallele, essi sono equipollenti.

Problema. — Dato un parallelogrammo OA.OB, ed un segmento OP, costrurre un segmento OQ tale che OP.OQ $\equiv$ OA.OB.

È chiaro che il piano OP.OQ contiene OP, e se OP.OQ $\equiv$ OA.OB, è necessario che OP sia contenuto in uno stesso piano con OA ed OB.



La retta condotta per O parallelamente a PA incontri la parallela ad OA condotta per B, nel punto Q. Dico che OQ soddisfa alle condizioni imposte. Se per Q conduco la parallela ad OP, e prendo in questa un punto ad arbitrio Q′, anche OQ′ soddisfa alle condizioni volute.

Infatti, i parallelogrammi OA.OB e OA.OQ hanno un segmento

OA comune, e sono compresi fra le rette parallele OA e BQ; quindi OA.OB ≡ OA.OQ; ma i parallelogrammi OA.OQ e OP.OQ hanno OQ comune, e sono compresi fra le rette parallele OQ e PA; quindi OA.OQ ≡ OP.OQ; perciò OA.OB ≡ OP.OQ.

Inoltre, siccome OP.OQ ≡ OP.OQ′, si deduce che ogni segmento OQ′ soddisfa alle condizioni volute.

18. Se le aree considerate hanno la stessa giacitura, ossia trovansi tutte in uno stesso piano, od in piani paralleli, è sufficientemente definito che cosa si intenda per loro somma, che è ancora un'area avente la stessa giacitura.

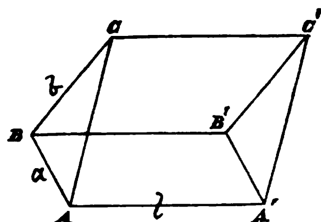
Intenderemo per prodotto di un'area α per un numero m una nuova area, tale che la ragione della sua grandezza alla grandezza di α sia eguale al valore assoluto di m, che abbia la stessa giacitura di α, e lo stesso verso se m è positivo, ovvero il verso opposto se m è negativo.

È chiaro che se α è un'area non nulla, ogni altra area avente la stessa giacitura si può mettere sotto la forma $m\alpha$.

Diremo che l'area σ è la somma geometrica delle aree α e β, aventi giacitura qualunque, se, proiettando su ogni piano arbitrario π parallelamente ad ogni retta arbitraria, la proiezione di σ è la somma delle proiezioni di α e di β.

Teorema. — Se **a**, **b** ed **l** sono segmenti, l'area determinata dal segmento **a** + **b** con **l** è la somma geometrica delle aree determinate da **a** con **l**, e da **b** con **l**:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\mathbf{l} \equiv \mathbf{a}.\mathbf{l}+\mathbf{b}.\mathbf{l}$$



Suppongansi dapprima i segmenti **a**, **b**, **l** in uno stesso piano. Sia AB ≡ **a**, BC ≡ **b**, e quindi AC ≡ **a** + **b**. Sia AA′ ≡ BB′ ≡ CC′ ≡ **l**. Sarà **a**.**l** ≡ ABB′A′, e **b**.**l** ≡ BCC′B′. Dalla somma di questi parallelogrammi togliendo il triangolo ABC, ed aggiungendovi l'equipollente A′B′C′, si deduce

$$\mathrm{ABB'A'} + \mathrm{BCC'B'} \equiv \mathrm{ACC'A}\,,$$

ossia

$$\mathbf{a}.\mathbf{l} + \mathbf{b}.\mathbf{l} \equiv (\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l}\,, \text{ c. v. d.}$$

Siano ora i segmenti comunque nello spazio. Si proietti su d'un piano qualunque. Siano $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{l}'$ le proiezioni di $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{l}$; sarà $\mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ la proiezione di $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, e $\mathbf{a}'.\mathbf{l}'$, $\mathbf{b}'.\mathbf{l}'$, $(\mathbf{a}' + \mathbf{b}').\mathbf{l}'$ le proiezioni di $\mathbf{a}.\mathbf{l}$ $\mathbf{b}.\mathbf{l}$ e $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l}$. Ora, per ciò che si è dimostrato, siccome $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{l}'$ sono in uno stesso piano, si deduce $\mathbf{a}'.\mathbf{l}' + \mathbf{b}'.\mathbf{l}' \equiv (\mathbf{a}' + \mathbf{b}').\mathbf{l}'$, ossia la proiezione, su d'un piano arbitrario, dell'area $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l}$ è la somma delle proiezioni di $\mathbf{a}.\mathbf{l}$ e di $\mathbf{b}.\mathbf{l}$, e quindi $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l} \equiv \mathbf{a}.\mathbf{l} + \mathbf{b}.\mathbf{l}$, c. v. d.

Il teorema precedente permette di sommare due, e quindi più aree contenute in piani non paralleli. Siano α e β le due aree contenute in piani non paralleli. Sulla retta intersezione dei due piani si prenda un segmento arbitrario $\mathbf{l}$, e si determini il segmento $\mathbf{a}$ in modo che $\mathbf{a}.\mathbf{l} \equiv \alpha$ ed il segmento $\mathbf{b}$ tale che $\mathbf{b}.\mathbf{l} \equiv \beta$. Sarà $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l}$ $\equiv \alpha + \beta$, ossia la somma delle aree date.

Siccome, scambiando i due segmenti che formano un parallelogrammo esso non cambia che segno, si deduce

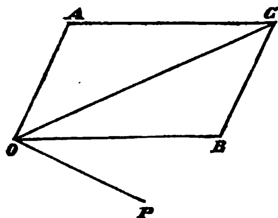
$$\mathbf{l}.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \equiv \mathbf{l}.\mathbf{a} + \mathbf{l}.\mathbf{b}$$

e quindi

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{c} + \mathbf{d}) \equiv \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{d} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{d}\,.$$

Il teorema dimostrato è equivalente ad un noto teorema di geometria piana.

Sia OACB un parallelogrammo, e OC la sua diagonale. Sarà OC $\equiv$ OA + OB. Preso nel piano ad arbitrio un punto P, sarà



$$\mathrm{OC.OP} \equiv \mathrm{OA.OP} + \mathrm{OB.OP}.$$

Ora OC.OP, OA.OP, OB.OP sono i doppi delle aree dei triangoli POC, POA, POB; dunque il primo triangolo è la somma degli altri due (teorema di Varignon).

19. Siano nello spazio n punti $A_1\ A_2 \ldots A_n$, cui siano affissi n segmenti $\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n$. Preso un punto O si consideri la somma geometrica delle aree:

$$\omega(O) \equiv OA_1.\mathbf{a}_1 + OA_2.\mathbf{a}_2 + \ldots + OA_n.\mathbf{a}_n .$$

Si vuol studiare il modo di variare di quest'area, ove varii il punto O.

Sia S un'altro punto dello spazio. Siccome $OA \equiv OS + SA$, si deduce

$$OA_1.\mathbf{a}_1 + OA_2.\mathbf{a}_2 + \ldots \equiv OS.(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots) + SA_1.\mathbf{a}_1 + SA_2.\mathbf{a}_2 + \ldots$$

ovvero

$$\omega(O) \equiv OS.(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots) + \omega(S)$$

od ancora, ponendo $\mathbf{s} \equiv \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots$,

$$\omega(O) \equiv OS.\mathbf{s} + \omega(S).$$

Supposto $\mathbf{s}$ non nullo, si deduce $\omega(O) \equiv \omega(S)$ se $OS.\mathbf{s} \equiv 0$; ossia se OS è parallelo ad $\mathbf{s}$. Quindi l'area $\omega(O)$ non varia se il punto O si muove su d'una parallela al segmento $\mathbf{s}$.

Se $\mathbf{s}$ è parallelo al piano $\omega(O)$, si può determinare un segmento OS tale che $\omega(O) \equiv OS.\mathbf{s}$; e pel quale $\omega(S) \equiv 0$. Questi punti S sono infiniti, e giacciono su d'una retta parallela ad $\mathbf{s}$. In tal caso l'area ω, somma di n parallelogrammi compresi fra un lato variabile con O, ed un lato fisso, resta espresso mediante un parallelogrammo della stessa natura. Ma se $\mathbf{s}$ non è parallelo al piano $\omega(O)$, non sarà mai $\omega(O) \equiv OS.\mathbf{s}$, e quindi per nessun punto S dello spazio si può avere $\omega(S) \equiv 0$.

Se poi $\mathbf{s} \equiv 0$, l'area $\omega(O)$ risulta indipendente dal punto O.

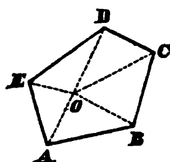
Limitandoci alle figure nel piano siano $A_1B_1 \equiv \mathbf{a}_1$, $A_2B_2 \equiv \mathbf{a}_2$, ...; allora $OA.\mathbf{a}$ è il doppio dell'area del triangolo OAB. Quindi, se la risultante $\mathbf{s}$ dei segmenti A_1B_1, A_2B_2,... è nulla, la somma dei triangoli OA_1B_1, OA_2B_2,... è costante per ogni punto O del piano. Se invece la risultante di questi segmenti non è nulla, la somma $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots$ è nulla per tutti i punti d'una certa retta. Segnata

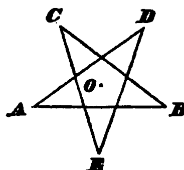
questa retta, e portato su essa un segmento equipollente ad s, e sia SS', si deduce

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + ... \equiv OSS',$$

e così la somma dei triangoli di sinistra è espressa mediante un solo triangolo.

Se i segmenti dati sono il lati d'un poligono chiuso ABCDE, si avrà appunto $s \equiv 0$, e quindi la somma $\omega \equiv OAB + OBC + OCD + ODE + OEA$ è costante, qualunque sia il punto O. Ora si vede che se il poligono non si interseca, questa somma costante è l'area del poligono. E si suol porre in generale per definizione dell'area d'una linea poligonale ABC... chiusa, qualunque, la somma $OAB + OBC + ...$, che è indipendente dal punto O.





Così ad esempio, se ABCDE è un pentagono regolare stellato, avrà un significato la sua area, benchè esso non risulti dai concetti della geometria elementare; e detto O il centro del pentagono, quest'area vale cinque volte l'area del triangolo OAB.

20. Siano ancora $A_1\, A_1 ... A_n$ n punti dello spazio, cui sono affissi i numeri o pesi $m_1 m_2 ... m_n$. Presi due punti P e Q si vuol studiare il modo di variare dell'area

$$\Omega \equiv m_1A_1PQ + m_2A_2PQ + ... + m_nA_nPQ\,,$$

al variare di P e Q.

Si ha

$$2\Omega \equiv m_1A_1P.PQ + m_2A_2P.PQ + ... + m_nA_nP.PQ,$$

ossia

$$2\Omega \equiv (m_1A_1P + m_2A_2P + ... + m_nA_nP).PQ$$

Se ora $m_1 + m_2 + ... + m_n$ non è nullo, esiste il baricentro S dei punti dati coi pesi dati, e sarà

$$m_1A_1P + m_2A_2P + ... + m_nA_nP \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)SP ;$$

quindi

$$2\Omega \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)SP.PQ ,$$

ed infine

$$\Omega \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)SPQ .$$

Così l'area Ω è uguale all'area del triangolo di vertici il baricentro ed i due punti dati, moltiplicata per $m_1 + m_2 + ... + m_n$.

Se invece $m_1 + m_2 + ... + m_n = 0$, $m_1A_1P + ... + m_nA_nP$ è un segmento indipendente da P. Dettolo **s**, sarà

$$2\Omega \equiv \mathbf{s}.PQ.$$

21. Ragionando dapprima nel piano, siano $x\ y$ e $x'\ y'$ le coordinate dei segmenti **a** e **b**.

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} , \qquad \mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}.$$

Osservando che $\mathbf{i}.\mathbf{i} \equiv 0$, $\mathbf{j}.\mathbf{j} \equiv 0$, $\mathbf{j}.\mathbf{i} \equiv -\mathbf{i}.\mathbf{j}$, si deduce

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv (xy' - x'y)\, \mathbf{i}.\mathbf{j} \equiv \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j} ;$$

e così resta espressa l'area **a.b** in funzione delle coordinate dei segmenti dati, e dell'area **i.j** formata dei segmenti di riferimento. Se questi sono eguali all'unità ed ortogonali, l'area **i.j** è appunto l'unità di misura delle aree, ed in tal caso $xy' - x'y$ è il numero che misura l'area **a.b**.

Se i punti A B C hanno per coordinate $x\,y$, $x'\,y'$, $x''\,y''$, si avrà

$$ABC \equiv \frac{1}{2} AB.AC \equiv \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x' - x & y' - y \\ x'' - x & y'' - y \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j} \equiv \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j}.$$

Nello spazio, riferiti i segmenti **a** e **b** ai segmenti **i j k**, sia

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} , \qquad \mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} ;$$

si deduce in modo analogo:

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv (xy'-x'y)\,\mathbf{i}.\mathbf{j} + (yz'-y'z)\,\mathbf{j}.\mathbf{k} + (zx'-xz')\,\mathbf{k}.\mathbf{i} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{j}.\mathbf{k} & \mathbf{k}.\mathbf{i} & \mathbf{i}.\mathbf{j} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

che esprime l'area **a.b** in funzione delle coordinate di **a** e di **b**, e delle aree **i.j**, **j.k**, e **k.i** che giacciono nei piani coordinati.

§ 7. Volumi.

22. Se α è un'area piana data in grandezza, giacitura, e senso, ed l un segmento pure dato, intenderemo con α.l il volume del solido (prisma) generato da un segmento che si muove conservandosi sempre equipollente ad l, e la cui origine percorra tutti i punti di α. Così **a.b.c** rappresenta il volume del parallelepipedo compreso da tre spigoli equipollenti ad **a**, **b**, **c**.

Come pei segmenti giacenti su d'una stessa retta non si ha a parlare di direzione, ma solamente di grandezza e senso, e come pelle aree che stanno in uno stesso piano non si ha a considerare che la grandezza e senso, così pei volumi non avremo a considerare che la grandezza e senso.

Diremo che due volumi α.l e β.l' sono equipollenti, se oltre all'avere la stessa grandezza, hanno lo stesso senso, ossia se trasportando l'un solido in modo che coincidano i piani delle aree α e β, e queste aree siano percorse nello stesso senso, i due solidi trovansi da una stessa parte, ovvero da parti opposte del piano delle aree.

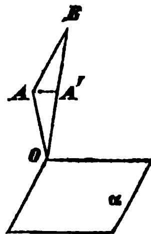
Così i volumi **a.b.c**, **b.c.a**, **c.a.b** sono equipollenti; mentrechè **b.a.c**, **a.c.b**, **c.b.a** sono pure fra loro equipollenti, ma di senso opposto ai primi.

È chiaro che cosa si intende per somma di più volumi, e per prodotto d'un volume per un numero.

Teorema. Il volume $\alpha.(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ è eguale alla somma dei volumi $\alpha.\mathbf{a}$ e $\alpha.\mathbf{b}$; cioè

$$\alpha.(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha.\mathbf{a} + \alpha.\mathbf{b}.$$

Invero, sia $OA \equiv \mathbf{a}$, e $AB \equiv \mathbf{b}$; per A si conduca il piano parallelo ad α, che incontri OB in A′. Il volume generato da OA è eguale a quello generato da OA′, perchè prismi aventi la stessa base, e compresi fra piani paralleli; e per la stessa ragione, il volume generato da AB è eguale al volume generato da A′B. Ma il volume generato da OA′ più il volume generato da A′B è il volume generato da OB, dunque



$$\alpha.OA + \alpha.AB = \alpha.OB\,, \quad \text{c. v. d.}$$

Quindi si deduce, che se **a**, **b**, **c** sono somme geometriche di più segmenti, il volume **a.b.c** è la somma di tutti i volumi ottenuti combinando una componente di **a** con una componente di **b** e con una componente di **c**.

23. Si riferiscano i segmenti dati a tre segmenti **i**, **j**, **k**, e sia

$$\mathbf{a} \equiv x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}\,,\quad \mathbf{b} \equiv x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}\,,\quad \mathbf{c} \equiv x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k};$$

e si calcoli il volume

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}).(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}).(x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}).$$

Sviluppando il membro di destra, e tenendo conto che ogni volume compreso fra tre dei segmenti **i j k**, di cui due siano ripetuti, è nullo, e che i volumi compresi fra i segmenti distinti **i**, **j**, **k**, sono tutti eguali a meno del segno, e valgono $\pm\,\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}$, secondochè per passare da questa scrittura alla precedente occorre un numero pari o dispari d'inversioni delle lettere **i j k**, si deduce che **a.b.c** è uguale ad **i.j.k** moltiplicato per un polinomio di cui tutti i termini sono della forma $\pm\,x_\alpha y_\beta z_\gamma$, ove α, β, γ sono una permutazione degli indici 1, 2, 3, e che il segno è + o —, secondochè la permutazione è di classe pari

o dispari; vale a dire, per la definizione dei determinanti

$$\mathrm{a.b.c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \mathrm{i.j.k.}$$

Il tetraedro ABCD è la sesta parte del parallelepipedo compreso fra gli spigoli AB, AC, e AD

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{6}\,\mathrm{AB.AC.AD}\,;$$

quindi, se $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ e $x_4y_4z_4$ sono le coordinate dei vertici ABCD, si avrà

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \mathrm{i.j.k}$$

ovvero

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \mathrm{i.j.k}$$

24. Siano $A_1\ A_2 \ldots A_n$ n punti dello spazio, e si immaginino delle aree $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$. Potremo, per maggior facilità, supporre che A_1 sia un punto dell'area ω_1, che A_2 sia un punto di ω_2, e così via. Preso ad arbitrio un punto O nello spazio, si vuol studiare il modo di variare, variando O, del volume

$$V(O) = \omega_1.OA_1 + \omega_2.OA_2 + \ldots + \omega_n.OA_n.$$

Sia S un altro punto dello spazio. Ricorrendo alla formula $OA \equiv OS + SA$, e posto $\Omega \equiv \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$, si deduce

$$V(O) = \Omega.OS + V(S).$$

Quindi sarà $V(O) = V(S)$ se $\Omega.OS = 0$, ossia, se Ω non è nullo, qualora OS sia parallelo al piano dell'area Ω. Ossia $V(O)$ conserva un valore costante quando O si sposti in un piano parallelo ad Ω.

Se Ω non è nullo, si può determinare un punto S tale che $\Omega.OS = V(O)$, e quindi $V(S) = 0$; e questi punti S sono in numero infinito, e giacciono su d'un piano parallelo ad Ω. Sia S un punto siffatto; l'ultima formula dice $V(O) = \Omega.OS$, ossia il volume V(O) risulta espresso mediante il solo segmento OS variabile con O.

Se poi $\Omega = 0$, V(O) ha un valore indipendente dal punto O.

I risultati precedenti si possono pure interpretare a questo modo. Il volume $\omega.OA$, ove A è un punto di ω, vale tre volte il volume della piramide di base ω e il cui vertice è O. Quindi: Se si hanno più aree ω_1, ω_2... determinate anche in posizione, e si fa la somma U(O) dei volumi delle piramidi aventi per basi queste aree, e per vertice un punto variabile O, se la somma delle aree $\Omega \equiv \omega_1 + \omega_2 + ...$ non è nulla, la somma delle piramidi è eguale alla piramide avente per base un'area $\Omega \equiv \omega_1 + \omega_2 + ...$ determinata di posizione, e per vertice il punto O. Quindi quella somma è costante se il punto O si sposta in un piano parallelo ad Ω, ed è nulla per tutti i punti del piano Ω. Se $\Omega \equiv 0$, la somma di queste piramidi è indipendente da O. Come caso speciale, se le aree ω sono le faccie di un poliedro non chiuso, il cui contorno sia una linea poligonale qualunque, U(O) è il volume del solido il cui vertice è O, e la cui base è il poliedro dato; e questo volume si mantiene costante se O si muove su d'un piano parallelo ad Ω. Se infine le aree ω sono le faccie d'un poliedro chiuso, $\Omega \equiv 0$, e il valore costante di U(O) coincide col volume del solido, qualora questo sia convesso. In ogni caso, si suol assumere U(O) come il volume del poliedro, qualunque sia la sua forma.

Esercizii.

25. — 1. Costrurre il triangolo ABC conoscendo i tre punti A'B'C' che dividono i lati in dati rapporti; p. e. tali che

$$BA' \equiv A'C, \quad 2CB' \equiv B'A, \quad 3AC' \equiv C'B.$$

2. Dimostrare che, essendo A, B, A', B' quattro punti dello spazio, si ha

$$2AB \times A'B' = \overline{AB'}^2 + \overline{A'B}^2 - \overline{AA'}^2 - \overline{BB'}^2.$$

3. Alcuni Autori indicano che il punto S è il baricentro dei punti $A_1 A_2 \dots A_n$, coi pesi $m_1 m_2 \dots m_n$ scrivendo

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) S = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n .$$

Dànno ragione sufficiente di questa notazione le formule:

a) Essendo O un punto arbitrario si ha (N. 13, formula 2)

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) OS \equiv m_1 OA_1 + m_2 OA_2 + \dots + m_n OA_n .$$

b) Essendo P e Q due punti arbitrarii, si ha (N. 20)

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \; PQS \equiv m_1 PQA_1 + m_2 PQA_2 + \dots + m_n PQA_n .$$

c) Essendo PQR tre punti arbitrarii, si ha

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) PQRS \equiv m_1 PQRA_1 + m_2 PQRA_2 + \dots + m_n PQRA_n .$$

d) Se l è una retta arbitraria, ed lA rappresenta il segmento (in grandezza, direzione e senso) che segna la minima distanza dalla retta l al punto A, si ha

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) lS \equiv m_1 lA_1 + m_2 lA_2 + \dots + m_n lA_n .$$

e) Se π è un piano arbitrario, e πA rappresenta il segmento che segna la minima distanza dal piano π al punto A, si ha

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \pi S \equiv m_1 \pi A_1 + m_2 \pi A_2 + \dots + m_n \pi A_n .$$

Dimostrare le formule *c*, *d*, *e*.

4. La proiezione ortogonale d'un'area su d'un piano è in grandezza eguale all'area proiettata moltiplicata pel coseno dell'angolo che il piano di quest'area fa col piano su cui si proietta.

Complement, cf. p. 111

5. Un'area piana si può rappresentare mediante un segmento, la cui direzione sia normale al piano dell'area, la cui grandezza sia misurata dallo stesso numero che misura la grandezza dell'area, ed il cui senso sia collegato convenientemente col senso dell'area, in modo cioè, che se le aree ω ed ω' sono rappresentate dai segmenti **a** ed **a**', trasportando l'area ω' in modo che il suo piano coincida col piano dell'area ω, e coincidano pure i sensi di queste aree, i segmenti **a** ed **a**', che acquistano la stessa direzione, abbiano pure lo stesso senso.

Dimostrare il teorema:

Se le aree α, β, γ, ... sono rappresentate dai segmenti **a**, **b**, **c**, ..., l'area $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ è rappresentata dal segmento $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \dots$

CAPITOLO I.

Limiti e derivate geometriche.

---

§ 1. Dei limiti.

1. I concetti del calcolo infinitesimale, cioè di funzione, limite, derivata, ecc. si possono applicare direttamente, oltrechè ai numeri, e alle grandezze misurabili da numeri, anche agli enti geometrici, come segmenti, aree, posizione d'un punto, d'una retta ecc.

Questi enti geometrici si possono considerare come costanti, o come variabili. E se in una questione compaiono più enti variabili, alcuni si possono considerare come variabili indipendenti, se li possiamo fissare a nostro arbitrio; ed altri come funzioni dei primi, se risultano determinati quando siano fissati i primi. Così noi diremo che la posizione di un punto nello spazio è funzione delle sue coordinate cartesiane; che l'area del triangolo ABC, come pure il piano del triangolo, sono funzioni delle posizioni dei punti ABC, ecc.

2. Diremo che:

1. Il segmento variabile $\mathbf{a}$ ha per limite il segmento fisso $\mathbf{a}_0$, se il valore assoluto della differenza geometrica $\overline{\mathbf{a}-\mathbf{a}_0}$ ha per limite zero.

2. L'area geometrica variabile ω ha per limite l'area fissa ω_0, ed il volume V ha per limite V_0, se il valore assoluto della differenza geometrica $\omega-\omega_0$, ovvero $V-V_0$, ha per limite zero.

3. Il punto variabile A ha per limite il punto fisso A_0, se la distanza A_0A ha per limite zero.

4. La retta variabile r ha per limite la retta fissa r_0, se la distanza d'ogni punto della retta fissa r_0 dalla variabile r ha per limite zero.

5. Il piano variabile π ha per limite il piano fisso π_0, se la distanza d'ogni punto del piano fisso π_0 dal piano variabile π ha per limite zero.

6. Una funzione dicesi continua se il limite della funzione è la funzione del limite.

3. Pei limiti di segmenti, aree e volumi variabili si hanno le proposizioni che seguono.

Teorema I. — Se i segmenti variabili $\mathbf{a}, \mathbf{b}, ...,$ in numero finito, hanno per limiti $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, ...,$ e se i numeri variabili $m, n, ...$ hanno per limiti $m_0\ n_0\ ..., ...$ allora

(1) $$\lim\ (\mathbf{a}+\mathbf{b}+...) \equiv \mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0+...$$

(2) $$\lim\ m\mathbf{a} \equiv m_0\mathbf{a}_0\,,$$

(3) $$\lim\ (m\mathbf{a}+n\mathbf{b}+...) \equiv m_0\mathbf{a}_0+n_0\mathbf{b}_0+...,$$

(4) $$\lim\ \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_0\times\mathbf{b}_0,$$

(5) $$\lim\ \mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}_0.\mathbf{b}_0,$$

(6) $$\lim\ \mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c} \equiv \mathbf{a}_0.\mathbf{b}_0.\mathbf{c}_0.$$

Per dimostrare la formula (1), pongasi

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0+\mathbf{x}\,,\quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_0+\mathbf{y}\,,\ ...$$

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{a}+\mathbf{b}+...\,,\quad \mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0+...$$

Sarà $$\mathbf{s}-\mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{x}+\mathbf{y}+...$$

Ora siccome $\mathbf{a}, \mathbf{b}, ...$ hanno per limiti $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, ...,$ le differenze $\mathbf{a}-\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}-\mathbf{b}_0, ...,$ ossia $\mathbf{x}, \mathbf{y}, ...$ hanno per limite zero; quindi anche la loro somma geometrica $\mathbf{s}-\mathbf{s}_0$, il cui valore assoluto non è mag-

giore della somma aritmetica dei valori assoluti dei segmenti $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$, ha per limite zero, e quindi $\lim \mathbf{s} \equiv \mathbf{s}_0$, c. v. d.

Per la formula (2), pongasi

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{x}, \quad m = m_0 + n, \quad \mathbf{b} \equiv m\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_0 \equiv m_0\mathbf{a}_0.$$

Sarà

$$\mathbf{b} \equiv (m_0 + n)(\mathbf{a}_0 + \mathbf{x}) \equiv m_0\mathbf{a}_0 + m_0\mathbf{x} + n\mathbf{a}_0 + n\mathbf{x},$$

e $\mathbf{b} - \mathbf{b}_0 \equiv m_0\mathbf{x} + n\mathbf{a}_0 + n\mathbf{x}$. Ora poichè $\lim \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0$, e $\lim m = m_0$, si deduce $\lim \mathbf{x} \equiv 0$, e $\lim n = 0$, e quindi $\lim (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \equiv 0$, ossia $\lim \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_0$, c. v. d.

La (3) è conseguenza delle formule (1) e (2).

Per la formula (4), posto $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{x}$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_0 + \mathbf{y}$, si ricava

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_0 \times \mathbf{y} + \mathbf{b}_0 \times \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

onde

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{y} + \mathbf{b}_0 \times \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

da cui si ricava immediatamente $\lim \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0$.

In modo analogo si dimostrano le (5) e (6).

Teorema II. — Se il segmento variabile $\mathbf{a}$ ha per coordinate x, y, z rispetto ai segmenti di riferimento fissi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, e queste coordinate hanno per limiti $x_0\, y_0\, z_0$, il segmento $\mathbf{a}$ ha per limite il segmento $\mathbf{a}_0$ di coordinate $x_0\, y_0\, z_0$.

Viceversa, se il segmento $\mathbf{a}$ ha per limite $\mathbf{a}_0$, le coordinate di $\mathbf{a}$ hanno per limite le coordinate di $\mathbf{a}_0$.

Infatti, se $\mathbf{a}$ ha per coordinate $x\, y\, z$, sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

e se x, y, z hanno per limiti $x_0\, y_0\, z_0$, si deduce (formula 3)

$$\lim \mathbf{a} \equiv x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} \equiv \mathbf{a}_0.$$

Viceversa, se il segmento $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ha per limite il segmento $\mathbf{a}_0 \equiv x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$, si deduce

$$\lim (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) \equiv \lim [(x - x_0)\,\mathbf{i} + (y - y_0)\,\mathbf{j} + (z - z_0)\,\mathbf{k}] \equiv 0.$$

Si consideri il volume $(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0).\mathbf{j}.\mathbf{k}$. Sarà

$$(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0).\mathbf{j}.\mathbf{k} \equiv (x - x_0)\,\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k};$$

e siccome il membro di sinistra ha per limite zero, lo stesso avverrà del membro di destra. Ma il volume $\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}$ è finito e non nullo, perchè i segmenti di riferimento sono supposti nè nulli, nè paralleli ad un piano; quindi deve essere $\lim (x - x_0) = 0$, ossia $\lim x = x_0$. In modo analogo si dimostra $\lim y = y_0$, e $\lim z = z_0$.

Teorema III. — Se la lunghezza del segmento $\mathbf{a}$ ha per limite la lunghezza di $\mathbf{a}_0$, e l'angolo $\widehat{\mathbf{a}_0\mathbf{a}}$ ha per limite zero, il segmento $\mathbf{a}$ ha per limite $\mathbf{a}_0$.

Sia $OA \equiv \mathbf{a}$, e $OA_0 \equiv \mathbf{a}_0$, sarà $A_0A \equiv \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$. Si descriva il cerchio di centro O e di raggio OA_0, e contenuto nel piano A_0OA, e sia B il suo punto d'intersezione colla semiretta OA, in modo che l'arco A_0B sottenda l'angolo $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$. Poichè l'angolo $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$ ha per limite zero, anche l'arco A_0B e la sua corda hanno limite zero. Il segmento BA è in grandezza eguale alla differenza delle lunghezze di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}_0$, quindi ha pure per limite zero; ed infine $A_0A \equiv A_0B + BA$ ha per limite zero, ossia $\lim \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0$.

4. Le proposizioni che seguono si riferiscono ai limiti di punti.

Teorema I. — Essendo O una origine fissa, se il segmento OP ha per limite OP_0, il punto P ha per limite P_0. Viceversa, se P ha per limite P_0, il segmento OP ha per limite OP_0.

Infatti, si ha $OP - OP_0 \equiv P_0P$. Quindi, se OP ha per limite OP_0, P_0P ha per limite zero, e P ha per limite P_0. Viceversa, se P ha per limite P_0, P_0P ha per limite zero, e OP ha per limite OP_0.

Di qui si deduce che le ricerche sui limiti di punti si possono ridurre a ricerche sui limiti di segmenti.

Teorema II. — Se le coordinate del punto P hanno per limiti le coordinate del punto P_0, il punto P ha per limite

il punto P_0. Viceversa, se il punto P ha per limite P_0, le coordinate di P hanno rispettivamente per limiti le coordinate di P_0.

Infatti, poichè le coordinate del punto P coincidono colle coordinate del segmento OP che va dall'origine O al punto variabile P, questo teorema è conseguenza dei due precedenti.

TEOREMA III. — Se i punti A B.... hanno per limiti $A_0 B_0$..., si ha $lim AB \equiv A_0B_0$, $lim ABC \equiv A_0B_0C_0$, $lim ABCD \equiv A_0B_0C_0D_0$.

Infatti si ha $AB \equiv OB - OA$, $A_0B_0 \equiv OB_0 - OA_0$, e sottraendo $AB - A_0B_0 \equiv B_0B - A_0A$. Se ora A e B hanno per limite A_0 e B_0, $lim A_0A \equiv 0$, e $lim B_0B \equiv 0$; quindi $lim\,(AB - A_0B_0) \equiv 0$, e $lim AB \equiv A_0B_0$.

Si ha $ABC \equiv \frac{1}{2} AB.AC$; e poichè $lim AB \equiv A_0B_0$, e $lim AC \equiv A_0C_0$, si deduce (N. 3, I, formula 5) $lim ABC \equiv \frac{1}{2} A_0B_0.A_0C_0 \equiv A_0B_0C_0$.

Analogamente, poichè $ABCD \equiv \frac{1}{6} AB.AC.AD$, si ha $lim ABCD \equiv \frac{1}{6} A_0B_0.A_0C_0.A_0D_0 \equiv A_0B_0C_0D_0$.

5. Dimostreremo ora alcuni teoremi che riguardano i limiti di rette.

TEOREMA I. — Se le distanze di due punti distinti della retta fissa r_0 dalla retta mobile r hanno per limite zero, la distanza d'ogni altro punto di r_0 da r ha per limite zero, e la retta r ha per limite r_0.

Infatti, siano sulla r_0 i punti distinti A e B; e sia C un altro punto della stessa retta. Si possono determinare due numeri m ed n tali che il punto C risulti il baricentro dei punti A e B coi pesi m ed n (Introd. N. 14), ossia, essendo O un punto qualunque, tali che

$$(m+n)\,OC \equiv m OA + n\,OB.$$

Siano AH, BK e CL le distanze di A B C da r. I punti H, K, L sono le proiezioni di A B C su r, e quindi L è il baricentro di H e K

coi pesi m ed n, ossia

$$(m+n)\,\mathrm{OL} \equiv m\mathrm{OH} + n\mathrm{OK}.$$

Sottraendo da questa eguaglianza la precedente, si ottiene

$$(m+n)\,\mathrm{CL} \equiv m\mathrm{AH} + n\mathrm{BK}$$

Se ora $\lim \mathrm{AH} \equiv 0$, e $\lim \mathrm{BK} \equiv 0$, si deduce $\lim \mathrm{CL} \equiv 0$, ossia la distanza d'ogni altro punto C di r_0 da r ha per limite zero, ed r ha per limite r_0.

TEOREMA II. — Se i punti A e B hanno per limiti i punti A_0 B_0 distinti, la retta AB ha per limite la retta A_0B_0.

Infatti, se i punti A B hanno per limite A_0 B_0, le distanze di A_0 e B_0 dalla retta AB, che in valore assoluto non sono maggiori di A_0A e B_0B, hanno pure per limite zero, e, pel teorema precedente, la retta AB ha per limite A_0B_0.

Viceversa, se la retta l ha per limite l_0, preso su questa un punto ad arbitrio A_0, si può sempre determinare un punto A della retta l che abbia per limite A_0; basta invero prendere per punto A la proiezione normale di A_0 su l; in tal caso A_0A rappresenta la distanza di A_0 dalla retta l, e quindi ha per limite zero.

TEOREMA III. — Se il punto A ha per limite A_0, e la retta l ha per limite l_0, la retta condotta per A parallelamente ad l ha per limite la retta condotta per A_0 parallelamente ad l_0.

Infatti, sia C_0D_0 una coppia di punti distinti di l_0, e siano CD due punti della l aventi per limiti C_0 e D_0. Si prenda $\mathrm{AB} \equiv \mathrm{CD}$, $A_0B_0 \equiv C_0D_0$. Poichè lim $\mathrm{CD} \equiv C_0D_0$, si deduce $lim \mathrm{AB} \equiv A_0B_0$; e poichè A ha per limite A_0, il punto B ha per limite B_0, e la retta AB ha per limite A_0B_0. Ma la retta AB è la retta condotta per A, e parallela ad l, e la A_0B_0 è la parallela ad l_0, dunque la prima retta ha per limite la seconda, c. v. d.

TEOREMA IV. — Se le rette variabili l ed m si incontrano

sempre in un punto P pure variabile, e le rette l ed m hanno per limite le rette distinte l_0 ed m_0, che si incontrano in P_0, il punto P ha per limite P_0.

Infatti, siano A e B due punti della retta l aventi per limiti i punti A_0 e B_0 di l_0. Poichè i punti ABP e $A_0B_0P_0$ sono in linea retta, si possono determinare due numeri x e x_0 tali che $AP \equiv xAB$, e $A_0P_0 \equiv x_0A_0B_0$. Per determinare effettivamente questi numeri, siano CD due punti della m aventi per limiti i punti C_0 e D_0 di m_0. Poichè i punti CDP e $C_0D_0P_0$ sono in linea retta, sarà $CD.CP \equiv 0$, e $C_0D_0.C_0P_0 \equiv 0$. Ora, poichè $CP \equiv AP - AC \equiv xAB - AC$, l'equazione $CD.CP \equiv 0$, si può scrivere

$$xCD.AB - CD.AC \equiv 0,$$

la quale determina il numero x come rapporto di due aree. In modo analogo x_0 è determinato dalla equazione

$$x_0C_0D_0.A_0B_0 - C_0D_0.A_0C_0 \equiv 0.$$

Si passi al limite; poichè i punti A B C D hanno per limiti A_0 B_0 C_0 D_0, le aree CD.AC e CD.AB hanno per limiti $C_0D_0.A_0C_0$ e $C_0D_0.A_0B_0$, e di queste la seconda non è nulla, poichè, per le ipotesi fatte, i segmenti C_0D_0 e A_0B_0 sono nè nulli nè coincidenti in direzione. Quindi il rapporto x delle due prime aree ha per limite il rapporto x_0 delle seconde; e poichè AB ha per limite A_0B_0, si deduce $lim AP \equiv lim xAB \equiv x_0A_0B_0 \equiv A_0P_0$, e siccome A ha per limite A_0, il punto P ha per limite P_0, c. v. d.

TEOREMA V. — *Se le rette l ed l_0 passano per un punto fisso O, ed l ha per limite l_0, il minimo angolo compreso fra le rette l ed l_0 ha per limite zero, e viceversa.*

Invero, sia A_0 un punto di l_0 distinto da O, e A_0A la sua distanza da l; e sia θ il minimo angolo compreso fra le rette l ed l_0. Si avrà in valor assoluto $A_0A = OA_0 sen\theta$. Quindi se l ha per limite l_0, $lim\, A_0A = 0$, e quindi $lim\, sen\theta = 0$. Viceversa se $lim\theta = 0$, sarà $lim A_0A = 0$, e quindi la distanza d'ogni punto di l_0 da l ha per limite zero, ed l ha per limite l_0.

6. Pei limiti di piani si hanno le proposizioni che seguono.

Teorema I. — Se le distanze di tre punti non in linea retta del piano fisso π_0 dal piano variabile π hanno per limite zero, la distanza d'ogni altro punto di π_0 da π ha per limite zero, e il piano π ha per limite π_0.

Infatti, siano ABC i tre punti non in linea retta di π_0; sia D un altro punto dello stesso piano. Si possono determinare tre numeri m, n, p tali che D risulti il baricentro di A B C coi pesi m, n, p; ossia

$$(m+n+p)\,OD \equiv mOA + nOB + pOC.$$

Siano AH, BK, CL, DM le distanze di A B C D da π. Saranno H K L M le proiezioni ortogonali di A B C D su π, e M il baricentro di H K L coi pesi $m\ n\ p$, ossia

$$(m+n+p)\,OM \equiv mOH + nOK + pOL;$$

sottraendo da questa eguaglianza la precedente, si ha

$$(m+n+p)\,DM \equiv pAH + nBK + mCL,$$

e se AH, BK, CL hanno per limite zero, anche DM ha per limite zero. Quindi la distanza d'ogni punto D di π_0 da π ha per limite zero, e π ha per limite π_0.

Teorema II. — Se i punti A B C hanno per limiti i punti $A_0\ B_0\ C_0$ non in linea retta, il piano ABC ha per limite il piano $A_0B_0C_0$.

Infatti, le distanze dei punti $A_0B_0C_0$ dal piano ABC sono in valore assoluto non maggiori di A_0A, B_0B e C_0C, le quali hanno per limiti zero, quindi quelle distanze hanno pure per limite zero, e, pel teorema che precede, il piano ABC ha per limite il piano $A_0B_0C_0$.

Viceversa, se il piano π ha per limite π_0, preso su questo un punto ad arbitrio A_0, si può sempre determinare un punto A di π avente per limite A_0; basta invero prendere per punto A la proiezione di A_0 su π.

TEOREMA III. — Se i punti A B ..., e le rette l m ..., e il piano π hanno rispettivamente per limiti A_0, B_0 ..., l_0, m_0 ... π_0, si ha:

a) Se il punto A_0 non sta sulla l_0, il piano passante pel punto A e per la retta l ha per limite il piano passante per A_0 e per l_0.

b) Se la retta l_0 non è parallela ad A_0B_0, il piano passante pei punti A e B, e parallelo alla retta l ha per limite il piano passante per A_0 e B_0, e parallelo ad l_0.

c) Se la retta l_0 non è parallela ad m_0, il piano passante per la retta m e parallelo ad l ha per limite il piano passante per m_0 e parallelo ad l_0.

d) Se la rette l_0 ed m_0 non sono parallele, il piano passante per A e parallelo ad l e m ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo ad l_0 e m_0.

e) Il piano passante per A e parallelo al piano π ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo a π_0.

Infatti, siano B_0 e C_0 due punti di l_0, e siano B e C due punti di l aventi per limiti B_0 e C_0. Allora, poichè i punti ABC hanno per limiti $A_0B_0C_0$, il piano ABC, ossia il piano Al, ha per limite $A_0B_0C_0$, ossia il piano A_0l_0.

Per dimostrare la *b)*, siano m ed m_0 le parallele ad l ed l_0 condotte per B e B_0. Il piano passante per A e B e parallelo ad l coincide col piano passante per A e per m, il quale ha per limite il piano passante per A_0 e per m_0, ossia il piano passante per A_0 B_0 e parallelo ad l_0.

Per la *c)*, siano A_0 e B_0 due punti di m_0, e AB due punti di m aventi per limiti A_0 e B_0; il piano passante per la m e parallelo ad l coincide col piano passante per A e B e parallelo ad l, e quindi siamo ridotti al caso precedente.

Per la *d)*, siano n ed n_0 le parallele ad m ed m_0 condotte per A ed A_0; il piano passante per A e parallelo ad l e m coincide col piano passante per n e parallelo ad l, il quale ha per limite il piano passante per n_0 e parallelo ad l_0, ossia il piano passante per A_0 e parallelo ad l_0 ed m_0.

Per la *e)*, siano l_0 ed m_0 due rette non parallele di π_0, e l ed m due rette di π aventi per limiti l_0 ed m_0. Il piano passante per A e parallelo a π coincide col piano passante per A e parallelo alle rette l ed m, e quindi ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo a l_0 ed m_0, ossia il piano passante per A_0 e parallelo a π_0.

Teorema IV. — Se la retta l ha per limite l_0, ed il piano π ha per limite π_0, che non contiene, nè è parallelo ad l_0, il punto d'intersezione di l con π ha per limite il punto d'intersezione di l_0 con π_0.

Invero, siano A_0 B_0 due punti distinti di l_0, e siano A B due punti di l aventi per limiti A_0 e B_0.

Siano C_0 D_0 E_0 tre punti non in linea retta di π_0; e C D E siano tre punti di π aventi per limiti C_0 D_0 E_0.

Sia P il punto d'intersezione di AB con π; P_0 il punto d'intersezione di A_0B_0 con π_0. Si potranno determinare due numeri x e x_0 tali che $AP \equiv xAB$, $A_0P_0 \equiv x_0A_0B_0$; e per determinarli, si osservi che i volumi $CDE.CP = 0$, $C_0D_0E_0.C_0P_0 = 0$; ovvero poichè $CP \equiv AP - AC \equiv xAB - AC$, la prima equazione diventa $xCDE.AB - CDE.AC = 0$, da cui risulta determinato x come rapporto dei volumi CDE.AC e CDE.AB. In modo analogo, x_0 risulta determinato come rapporto dei volumi $C_0D_0E_0.A_0C_0$ e $C_0D_0E_0.A_0B_0$. Si passi al limite. Poichè i punti ABCDE hanno per limiti A_0 B_0 C_0 D_0 E_0, i i volumi CDE.AC e CDE.AB hanno per limiti i volumi $C_0D_0E_0.A_0C_0$, e $C_0D_0E_0.A_0B_0$, e di questi il secondo non è nullo per le ipotesi fatte. Quindi il rapporto x dei due primi volumi ha per limite il rapporto x_0 dei secondi; e perciò $AP \equiv xAB$ ha per limite $x_0A_0B_0 \equiv A_0P_0$; e siccome A ha per limite A_0, il punto P ha per limite P_0.

Teorema V. — Se i piani π e π' hanno per limiti i piani π_0 e π_0' non paralleli, la retta intersezione dei due primi piani ha per limite la retta d'intersezione dei secondi.

Infatti, siano A_0 e B_0 due punti distinti di π_0', e la retta A_0B_0 incontri il piano π_0, e quindi la retta $\pi_0\pi_0'$, nel punto P_0; siano A e B due punti di π' aventi per limiti A_0B_0, e la retta AB incontri

il piano π, e quindi la retta $\pi\pi'$ nel punto P. Per quanto si è dimostrato, la retta AB ha per limite A_0B_0, ed il punto P d'intersezione della retta AB con π ha per limite il punto P_0 d'intersezione di A_0B_0 con π_0; dunque un punto P della retta $\pi\pi'$ ha per limite un punto P_0 della retta $\pi_0\pi_0'$. E poichè, cambiando la posizione dei punti A_0B_0, si può dimostrare la stessa cosa per altri punti, si deduce che la retta $\pi\pi'$ ha per limite la $\pi_0\pi_0'$.

Teorema VI. — *Se i piani $\pi\pi'\pi''$ hanno per limiti i piani $\pi_0\pi_0'\pi_0''$ non paralleli ad una stessa retta, il punto d'intersezione dei tre primi piani ha per limite il punto d'intersezione dei tre secondi.*

Infatti i piani π' e π'' si incontrano secondo una retta $\pi'\pi''$ che ha per limite la $\pi_0'\pi_0''$. La retta $\pi'\pi''$ incontra il piano π nel punto $\pi\pi'\pi''$ che ha per limite il punto d'intersezione di $\pi_0'\pi_0''$ con π_0, ossia il limite del punto $\pi\pi'\pi''$ è il punto $\pi_0\pi_0'\pi_0''$, c. v. d.

Teorema VII. — *Se i piani π e π_0 passano per uno stesso punto O, e il piano π ha per limite π_0, l'angolo diedro più piccolo compreso fra i piani π e π_0 ha per limite zero, e viceversa.*

Infatti, siano A_0 e B_0 due punti del piano π_0 aventi la stessa distanza r da O, e tali che l'angolo A_0OB_0 sia retto. Dette A_0A e B_0B le distanze di A_0 e B_0 dal piano π, e θ l'angolo $\pi\pi_0$, si ha dalla trigonometria

$$\overline{A_0A}^2 + \overline{B_0B}^2 = r^2 sen^2\theta.$$

(Infatti, se da A_0 e B_0 si abbassano le perpendicolari A_0H e B_0K sulla retta $\pi\pi_0$, dai triangoli rettangoli A_0AH e B_0BK, nei quali gli angoli in H e K sono eguali a θ, si ricava in valor assoluto

$$A_0A = A_0H sen\theta\,, \quad B_0B = B_0K sen\theta\,,$$

e poichè $B_0K = OH$, e $\overline{A_0H}^2 + \overline{HO}^2 = \overline{OA_0}^2 = r^2$, elevando a quadrato e sommando si ha la formula citata).

Ora se π ha per limite π_0, A_0A e B_0B hanno per limite zero, e quindi $lim\, sen\theta = 0$, e $lim\theta = 0$.

Viceversa, siccome dalla formula citata si ha

$$A_0A^2 < r^2 sen^2\theta\,,$$

se $lim\theta = 0$, si deduce $lim A_0A = 0$, ossia la distanza d'ogni punto A_0 di π_0 da π ha per limite zero, e il piano π ha per limite π_0.

Teorema VIII. — **Se la retta l e il punto A hanno per limite l_0 e A_0, il piano normale ad l e passante per A, ha per limite il piano normale ad l_0 e passante per A_0.**

Invero da un punto fisso O si conducano la retta m parallela ad l, ed m_0 parallela ad l_0. Poichè l ha per limite l_0, m ha per limite m_0, e l'angolo mm_0 ha per limite zero (N. 5, III e V).

Per O si conducano il piano $\pi \perp l$, e $\pi_0 \perp l_0$. L'angolo diedro $\pi\pi_0$ è eguale all'angolo piano ll_0, e quindi ha per limite zero, e, per l'ultimo teorema, il piano π ha per limite π_0.

Ora il piano passante per A e normale ad l coincide col piano passante per A e parallelo a π, ed esso ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo a π_0, vale a dire ha per limite il piano passante per A_0 e normale ad l_0.

Teorema IX. — **Se il piano π ed il punto A hanno per limiti π_0 e A_0, la retta normale a π e passante per A ha per limite la normale a π_0 passante per A_0.**

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Teorema X. — **Se la retta l ed il piano π hanno per limiti l_0 e π_0, il piano passante per l e normale a π ha per limite il piano passante per l_0 e normale a π_0.**

Infatti, da un punto fisso O si conduca la retta m perpendicolare a π, e la m_0 a π_0; la retta m ha per limite m_0; e il piano che passa per l ed è normale a π, siccome coincide col piano passante per l e parallelo ad m, ha per limite il piano passante per l_0 e parallelo a m_0, vale a dire ha per limite il piano che passa per l_0 ed è normale a π_0.

7. Dalle proposizioni dimostrate risulta la continuità delle più semplici funzioni geometriche, in cui gli enti variabili siano punti, rette, e piani; vale a dire il limite della funzione è la funzione del limite, eccettuato il solo caso in cui gli enti variabili assumano al limite una posizione tale che la loro funzione cessi di essere determinata.

Combinando insieme le costruzioni semplicissime, di cui si è dimostrata la continuità, si può dedurre la continuità di altre funzioni geometriche meno semplici. Un esempio basterà a rischiarare queste parole.

È noto che se due rette l ed m non sono parallele, esiste una ed una sola retta n che le incontra amendue ad angolo retto. Essa si ottiene conducendo da un punto fisso O il piano π parallelo ad amendue; poi il piano α passante per l e perpendicolare a π, e il piano β passante per m e perpendicolare a π; la retta d'intersezione dei piani α e β è la retta n cercata. Si vuol ora dimostrare che se le rette l ed m variabili hanno per limiti l_0 ed m_0, la retta n perpendicolare comune ad l ed m ha per limite la retta n_0 perpendicolare comune ad l_0 ed m_0. Perciò siano π_0, α_0, β_0, i piani analoghi a π, α, β, ma costrutti sulle rette l_0 ed m_0. Poichè l ed m hanno per limiti l_0 ed m_0, il piano π parallelo ad l ed m, e passante per O, ha per limite il piano π_0 parallelo ad l_0 e m_0 e passante per O. Il piano α passante per l e normale a π ha per limite il piano α_0 passante per l_0 e normale a π_0; analogamente β ha per limite β_0, e la retta n, intersezione dei piani α e β ha per limite la n_0 intersezione dei piani α_0 e β_0.

§ 2. Derivate dei segmenti.

8. Il segmento variabile **a** dicesi funzione d'un numero t data in un certo intervallo, se ad ogni valore di t in questo intervallo cor-

risponde un segmento **a**. Indicheremo con $\mathbf{a}(t)$ un segmento funzione di t; con $\mathbf{a}(t_0)$ quel segmento che corrisponde al valore t_0 di t.

Ad esempio, se $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n$ sono segmenti costanti, il segmento

$$\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 t + \mathbf{p}_2 t^2 + \dots + \mathbf{p}_n t^n$$

è una funzione di t. Lo stesso avverrebbe se invece di $t, t^2, \dots$ si avessero funzioni numeriche qualunque di t.

Dati a t due valori t_0 e $t_0 + h$, sia $\Delta\mathbf{a}$ la differenza geometrica dei segmenti corrispondenti

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(t_0 + h) - \mathbf{a}(t_0).$$

Dicesi *derivata* del segmento $\mathbf{a}(t)$ per $t = t_0$, il limite del segmento $\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}$, ove h tenda a zero. Questa derivata è un nuovo segmento. La indicheremo con $\mathbf{a}'(t_0)$. Il prodotto della derivata per un numero arbitrario dt, differenziale della variabile indipendente t, dicesi differenziale del segmento. Lo indicheremo con $d\mathbf{a}(t)$, ovvero $d\mathbf{a}$. Quindi per definizione:

$$d\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{a}'(t)\, dt.$$

In modo analogo, intenderemo per derivata di un'area $\omega(t)$ funzione di un numero t, il limite verso cui tende il rapporto $\frac{\omega(t+h) - \omega(t)}{h}$, ove h tenda a zero; e questa derivata è un'area.

E intenderemo per derivata del volume $V(t)$ funzione di t il limite di $\frac{V(t+h) - V(t)}{h}$ per $h = 0$; essa è un volume.

9. Per i segmenti sussistono regole di derivazione, alcune delle quali sono analoghe a quelle che servono per le funzioni numeriche.

Teorema I. — Se i segmenti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ hanno derivate $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}', \dots$, la loro somma geometrica $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots$ ha per derivata la somma geometrica delle derivate $\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \dots$

Infatti, posto $\mathbf{s} \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots$, e dati a t due valori t e $t + h$, e detti $\Delta\mathbf{a}, \Delta\mathbf{b}, \dots \Delta\mathbf{s}$ gli incrementi dei segmenti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots \mathbf{s}$, si ricava

$$\Delta \mathbf{s} \equiv \Delta \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b} + \ldots$$

quindi

$$\frac{\Delta \mathbf{s}}{h} \equiv \frac{\Delta \mathbf{a}}{h} + \frac{\Delta \mathbf{b}}{h} + \ldots,$$

e passando al limite, poichè $\frac{\Delta \mathbf{a}}{h}$, $\frac{\Delta \mathbf{b}}{h}$, ... hanno per limiti $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, ... si deduce che anche $\frac{\Delta \mathbf{s}}{h}$ tende ad un limite $\mathbf{s}'$ ossia $\mathbf{s}$ ha una derivata

$$\mathbf{s}' \equiv \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \ldots$$

Questa formula si può pure scrivere

$$d(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots) \equiv d\mathbf{a} + d\mathbf{b} + \ldots$$

Teorema II. — Se il segmento $\mathbf{a}$ ed il numero x sono funzioni di t aventi per derivata $\mathbf{a}'$ ed x', la derivata del segmento $x\mathbf{a}$ vale $x\mathbf{a}' + x'\mathbf{a}$.

Infatti, posto $\mathbf{b} \equiv x\mathbf{a}$, e dati a t i valori t e $t + h$, e detti $\mathbf{a}$, x, $\mathbf{b}$, e $\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$, $x + \Delta x$, $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ i segmenti e numeri corrispondenti, si avrà

$$\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \equiv (x + \Delta x)\ (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) \equiv x\mathbf{a} + x\Delta\mathbf{a} + \mathbf{a}\Delta x + \Delta x \Delta\mathbf{a},$$

ovvero

$$\Delta\mathbf{b} \equiv x\Delta\mathbf{a} + \mathbf{a}\Delta x + \Delta x\Delta\mathbf{a},$$

$$\frac{\Delta\mathbf{b}}{h} \equiv x\frac{\Delta\mathbf{a}}{h} + \mathbf{a}\frac{\Delta x}{h} + \frac{\Delta x}{h}\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}h,$$

e facendo tendere h a zero, si ha la formula a dimostrarsi.

Come caso particolare, se $\mathbf{a}$ è fisso, ed x variabile, funzione di t, si avrà

$$dx\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}dx\,;$$

e se x è costante, ed $\mathbf{a}$ variabile

$$dx\mathbf{a} \equiv xd\mathbf{a}.$$

Applicando le regole precedenti alla funzione

$$\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 t + \mathbf{p}_2 t^2 + \dots + \mathbf{p}_n t^n,$$

ove $\mathbf{p}_0\, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n$ sono segmenti costanti, si deduce

$$\mathbf{a}'(t) \equiv \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 t + \dots + n\mathbf{p}_n t^{n-1}.$$

TEOREMA III. — Se il segmento **a** ha per coordinate $x\ y\ z$ funzioni di t, e queste hanno derivata $x'\ y'\ z'$, il segmento **a** ha per derivata il segmento **a'** di coordinate $x'\ y'\ z'$.

Viceversa, se il segmento **a** ha per derivata **a'**, le coordinate di **a** hanno per derivate le coordinate di **a'**.

Infatti, se **a** ha per coordinate $x\ y\ z$ rispetto ai segmenti fondamentali fissi **i**, **j**, **k**, sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

e per ciò che si è dimostrato (Teoremi I e II)

$$\mathbf{a}' \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Viceversa, dati a t i valori t e $t+h$, e detti $\Delta\mathbf{a}$, Δx, Δy, Δz gli incrementi del segmento **a** e dei numeri x, y, z, sarà

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \Delta x.\mathbf{i} + \Delta y.\mathbf{j} + \Delta z.\mathbf{k},$$

e

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{h} \equiv \frac{\Delta x}{h}.\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{h}.\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{h}.\mathbf{k},$$

e se **a** ha derivata $\mathbf{a}' \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, siccome $\lim \frac{\Delta\mathbf{a}}{h} \equiv \mathbf{a}'$, dovrà essere (N. 3, II) $\lim \frac{\Delta x}{h} = x'$, $\lim \frac{\Delta y}{h} = y'$, $\lim \frac{\Delta z}{h} = z'$, ossia $x\ y\ z$ hanno per derivata $x'\ y'\ z'$.

Siccome, le coordinate del segmento **a** sono funzioni di t spesso facili a calcolarsi, e di cui si sa pure calcolare la derivata, il teorema precedente permette di determinare, nei casi più comuni, la derivata dei segmenti variabili.

Si osservi ancora che $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ è la proiezione del segmento **a** sul

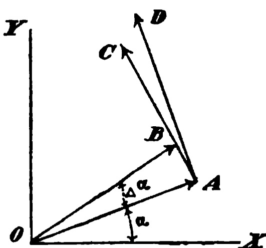
piano xy fatta parallelamente all'asse delle z, e che $z\mathbf{k}$ è la proiezione di $\mathbf{a}$ sull'asse delle z, fatta parallelamente al piano xy. Ora la derivata di $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ è $x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}$, cioè la proiezione di $\mathbf{a}'$ derivata di $\mathbf{a}$, e la derivata di $z\mathbf{k}$ è $z'\mathbf{k}$ ossia la proiezione di $\mathbf{a}'$ sull'asse delle z. Quindi si deduce:

Teorema IV. — La derivata della proiezione parallela di un segmento è la proiezione della derivata di questo segmento.

Questo teorema si potrebbe pure dimostrare direttamente.

Teorema V. — Se, in un piano fisso, il segmento $\mathbf{a} \equiv \overline{OA}$ è di lunghezza costante, e fa con un asse fisso OX un angolo variabile α, sarà il segmento $\mathbf{a}$ funzione di α, e la sua derivata è un segmento $\mathbf{a}'$ eguale in lunghezza ad $\mathbf{a}$, e tale che l'angolo $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{a}'}$ è eguale ad un retto, e quindi l'angolo che fa coll'asse OX vale $\alpha+\frac{\pi}{2}$.

Infatti, dati ad α i valori α ed $\alpha+\Delta\alpha$, siano $\overline{OA} \equiv \mathbf{a}$, e $\overline{OB} \equiv \mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}$ i segmenti corrispondenti. Sarà $AB \equiv \Delta\mathbf{a}$. Sia $AC \equiv \frac{AB}{\Delta\alpha}$, e AD il segmento eguale in lunghezza ad OA, e tale che l'angolo formato dalle direzioni OA e AD sia un retto. Si vuol dimostrare che il limite di AC è AD. Ora è facile il vedere dalla figura che l'angolo DAC vale $\frac{1}{2}\Delta\alpha$; inoltre $lung\,AC = \frac{1}{\Delta\alpha}\, lung\,AB = \frac{1}{\Delta\alpha}\, 2\, lung\, OA.sen\, \frac{1}{2}\Delta\alpha = lung\,OA \frac{sen\frac{1}{2}\Delta\alpha}{\frac{1}{2}\Delta\alpha}$, ha per limite la lunghezza di OA, vale a dire la lunghezza di AD. Quindi, poichè l'angolo che fanno i segmenti AC e AD ha per limite zero, e la lunghezza di AC ha per limite la lunghezza di AD, si conchiude che AC ha per limite AD, c.v.d.



Oppure, riferito il segmento OA agli assi cartesiani ortogonali OX ed OY, detta a la lunghezza del segmento OA, le proiezioni di

OA sugli assi sono misurate dai numeri $a\cos\alpha$, e $a\sin\alpha$, i quali sono le coordinate di OA. Quindi, pel teorema III, la derivata del segmento OA ha per coordinate $-a\sin\alpha$, e $a\cos\alpha$, dal che si deduce che essa è appunto il segmento enunciato nel teorema.

10. I teoremi che seguono permettono di determinare la derivata di numeri, aree e volumi che dipendono da segmenti funzioni della variabile t.

Teorema I. — Se i segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno per derivata $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$, il prodotto $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ha per derivata $\mathbf{a}\times\mathbf{b}'+\mathbf{a}'\times\mathbf{b}$; ossia

$$d(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times d\mathbf{b}+\mathbf{b}\times d\mathbf{a}\,.$$

Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e fatta la differenza dei valori corrispondenti di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, si ha

$$\Delta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a})\times(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})-\mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

ossia

$$\Delta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\Delta\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\Delta\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}\times\Delta\mathbf{b},$$

e

$$\frac{\Delta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{h}=\mathbf{a}\times\frac{\Delta\mathbf{b}}{h}+\mathbf{b}\times\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}+\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}\times\frac{\Delta\mathbf{b}}{h}h$$

e, passando al limite, si ha la formula a dimostrarsi.

Come caso particolare, fatto $\mathbf{b}\equiv\mathbf{a}$ si trova

$$d\mathbf{a}^2=2\mathbf{a}\times d\mathbf{a}.$$

Teorema II. — Se il segmento non nullo $\mathbf{a}$ ha per derivata $\mathbf{a}'$, il numero che misura la lunghezza di $\mathbf{a}$ ha per derivata il numero che misura la projezione di $\mathbf{a}'$ su $\mathbf{a}$, preso positivamente se questa proiezione ha lo stesso senso di $\mathbf{a}$, negativamente se ha senso contrario.

Infatti, detta a la lunghezza del segmento $\mathbf{a}$, si avrà $\mathbf{a}^2=a^2$; quindi derivando $\mathbf{a}\times\mathbf{a}'=a\frac{da}{dt}$. Sia p il numero che misura la

proiezione di $\mathbf{a}'$ su $\mathbf{a}$, preso positivamente se questi segmenti hanno lo stesso senso, negativamente se senso contrario. Sarà $\mathbf{a} \times \mathbf{a}' = ap$; e quindi $ap = a\frac{da}{dt}$, e dividendo per a che non è nullo, $\frac{da}{dt} = p$, c. v. d.

Teorema III. — Se i segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno per derivate $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$, la derivata dell'area $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ è $\mathbf{a}.\mathbf{b}' + \mathbf{a}'.\mathbf{b}$.

Invero, si ha $\Delta(\mathbf{a}.\mathbf{b}) \equiv (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}).(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - \mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}.\Delta\mathbf{b} + \Delta\mathbf{a}.\mathbf{b} + + \Delta\mathbf{a}.\Delta\mathbf{b}$; quindi $\frac{\Delta(\mathbf{a}.\mathbf{b})}{h} \equiv \mathbf{a}.\frac{\Delta\mathbf{b}}{h} + \frac{\Delta\mathbf{a}}{h}.\mathbf{b} + \frac{\Delta\mathbf{a}}{h}.\Delta\mathbf{b}$; e passando al limite si ha la formula a dimostrarsi.

Teorema IV. — Se l'area ω e il segmento $\mathbf{l}$ hanno per derivata ω' ed $\mathbf{l}'$, la derivata del volume $\omega.\mathbf{l}$ è $\omega.\mathbf{l}' + \omega'.\mathbf{l}$.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Di qui si deduce che se $\mathbf{a}'$ $\mathbf{b}'$ $\mathbf{c}'$ sono le derivate dei segmenti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, la derivata del volume $\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}$ è

$$\mathbf{a}'.\mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{b}'.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}'.$$

§ 3. Derivate successive.

11. Sia $\mathbf{a}'(t)$ la derivata del segmento $\mathbf{a}(t)$. Sarà $\mathbf{a}'(t)$ un segmento, funzione di t, che può avere una nuova derivata che indicheremo con $\mathbf{a}''(t)$, e che diremo derivata seconda di $\mathbf{a}(t)$. La derivata della derivata seconda si dirà derivata terza, e così via.

Così ad esempio, se $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono segmenti costanti, ed i numeri x y z sono funzioni di t aventi derivate successive, si avrà

$$\mathbf{a}' \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}'' \equiv x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k},$$

ed in generale

$$\mathbf{a}^{(n)} \equiv x^{(n)}\mathbf{i} + y^{(n)}\mathbf{j} + z^{(n)}\mathbf{k},$$

ossia le coordinate della derivata n^{ma} di **a** sono le derivate n^{me} delle coordinate di **a**.

Se **a** è un segmento contenuto in un piano fisso, di lunghezza costante, e che fa con una retta fissa OX del piano l'angolo α, che si assume come variabile indipendente, la sua derivata è un segmento **a**$'$ eguale in lunghezza ad **a**, e che fa con questo un angolo retto, e quindi che fa con OX l'angolo $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (N. 9, V). E la derivata di **a**$'$ è un segmento **a**$''$ eguale in lunghezza ad **a**$'$ e ad **a**, e che fa con **a**$'$ un angolo retto, ossia con **a** due retti. Vale a dire il segmento **a**$''$ è eguale ed opposto ad **a**:

$$\mathbf{a}'' \equiv -\mathbf{a}.$$

In modo analogo **a**$'''$ è un segmento eguale in grandezza ai precedenti, e che fa con **a** un angolo eguale a tre retti, e quindi è opposto ad **a**$'$; $\mathbf{a}''' \equiv -\mathbf{a}'$, e così via.

Fra i valori di un segmento, ove si attribuiscano varii valori alla variabile t, e le derivate successive del segmento stesso passano relazioni analoghe a quelle che sussistono per le funzioni numeriche, e che si potrebbero dimostrare direttamente con ragionamenti analoghi, ma che si ottengono più facilmente da queste mediante le coordinate.

Dimostreremo dapprima una formula analoga a quella di Taylor.

12. Teorema. — Se il segmento $\mathbf{a}(t)$ è funzione di t, avente pel valore considerato di t le successive derivate fino all'ordine n, posto

$$\mathbf{a}(t+h) \equiv \mathbf{a}(t) + h\mathbf{a}'(t) + \frac{h^2}{1.2}\mathbf{a}''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\left[\mathbf{a}^{(n)}(t) + \epsilon\right],$$

il segmento ϵ ha per limite zero col tendere di h a 0.

Infatti, siano $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ le coordinate del segmento **a** (t).

Poichè questo ha le derivate successive fino all'ordine n, lo stesso avverrà delle sue coordinate x, y, z.

Ora si sa che, se $f(t)$ è funzione avente le successive derivate fino all'ordine n, posto

$$f(t+h) = f'(t) + \frac{h^2}{1.2} f''(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(t) + \epsilon],$$

il numero ϵ ha per limite zero col tendere di h a zero (*).

(*) Questa formula si può considerare come compresa in quella del N. 67 del *Calcolo differenziale*, ove si supponga l'esistenza e la continuità della derivata d'ordine $n+1$ nell'intervallo $(t, t+h)$. Invero paragonando la formula sopra scritta colla

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t + \theta h),$$

si ricava

$$\epsilon = \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(t+\theta h),$$

e quindi, facendo tendere h a zero, $lim \epsilon = 0$.

Ma la formula in questione si può pure dimostrare senza fare nuove supposizioni, cioè senza supporre l'esistenza della derivata n^a per valori di t diversi da quello considerato, e tanto meno la sua continuità, l'esistenza della derivata d'ordine $n+1$, e la continuità di questa. Invero, da essa si ricava

$$\epsilon = \frac{f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \frac{h^2}{1.2} f''(t) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t)}{\frac{1}{n!} h^n},$$

ove il numeratore ed il denominatore sono funzioni di h che si annullano insieme alle loro derivate $1^a, 2^a, \dots (n-1)^{ma}$ per $h = 0$; il numeratore ha ancora nulla la derivata n^a, mentre quella del denominatore vale 1; quindi (*Calc. differ.* N. 124), $lim \epsilon = 0$.

Se si fa $n = 1$, la formula diventa

$$f(t+h) = f(t) + h[f'(t) + \epsilon], \text{ con } lim \epsilon = 0,$$

che è la definizione della derivata. La formula generale si può anche ottenere da questa leggendo $f^{(n-1)}(t)$ invece di $f(t)$, ed integrando rispetto ad h, fra 0 ed h, $n-1$ volte. (Vedi *Calc. differ.*, Annotazioni pag. XIX).

Si applichi questa formula alle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Si avrà

$$x(t+h)=x(t)+hx'(t)+\frac{h^2}{1.2}x''(t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[x^{(n)}(t)+\alpha]$$

$$y(t+h)=y(t)+hy'(t)+\frac{h^2}{1.2}y''(t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[y^{(n)}(t)+\beta]$$

$$z(t+h)=z(t)+hz'(t)+\frac{h^2}{1.2}z''(t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[z^{(n)}(t)+\gamma]$$

ove $\alpha\ \beta\ \gamma$ sono numeri infinitesimi con h. Si moltiplichino queste eguaglianze per **i**, **j**, **k** e si sommino. Osservando che

$$\mathbf{a}(t+h)\equiv x(t+h)\mathbf{i}+y(t+h)\,\mathbf{j}+z(t+h)\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a}(t)\equiv x(t)\mathbf{i}+y\,(t)\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}\,,$$
$$\mathbf{a}'(t)\equiv x'(t)\mathbf{i}+y'\,(t)\mathbf{j}+z'(t)\,\mathbf{k}\,,\ \text{ecc.}$$

si ricava

$$\mathbf{a}(t+h)\equiv\mathbf{a}(t)+h\mathbf{a}'(t)+\frac{h^2}{1.2}\mathbf{a}''(t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[\mathbf{a}^{(n)}(t)+\bar{\epsilon}]\,,$$

ove $\bar{\epsilon}\equiv\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$ è un segmento che ha per limite zero col tendere di h a zero, c. v. d.

13. Anche pei segmenti si possono definire funzioni analoghe alle funzioni interpolari (*Calc. diff.* N. 84).

Pongasi

$$\mathbf{a}(t_1\,t_2)\equiv\frac{\mathbf{a}(t_1)-\mathbf{a}(t_2)}{t_1-t_2}\,,\quad \mathbf{a}(t_1\,t_2\,t_3)=\frac{\mathbf{a}(t_1\,t_2)-\mathbf{a}(t_1\,t_3)}{t_2-t_3}\,,\ \ldots\ldots$$

I segmenti $\mathbf{a}(t_1, t_2)$, $\mathbf{a}(t_1\,t_2\,t_3)$, ... diconsi le funzioni interpolari di primo, secondo, ecc., ordine di $\mathbf{a}(t)$.

Teorema. — Se il segmento $\mathbf{a}(t)$ ha le successive derivate continue, fino all'ordine considerato, col tendere di $t_1\,t_2$... ad uno stesso valore t si ha

$$\lim\mathbf{a}(t_1\,t_2)\equiv\mathbf{a}'(t),\quad \lim\mathbf{a}(t_1\,t_2\,t_3)\equiv\frac{1}{2}\mathbf{a}''(t)\,,$$

ed in generale

$$\lim\mathbf{a}(t_1\,t_2\ldots t_n)\equiv\frac{1}{(n-1)!}\mathbf{a}^{(n-1)}(t).$$

Infatti, riferito il segmento **a** ai segmenti **i**, **j**, **k**, e posto

$$\mathbf{a}(t) \equiv x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

si ricava

$$\frac{\mathbf{a}(t_1) - \mathbf{a}(t_2)}{t_1 - t_2} \equiv \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2}\mathbf{i} + \frac{y(t_1) - y(t_2)}{t_1 - t_2}\mathbf{j} + \frac{z(t_1) - z(t_2)}{t_1 - t_2}\mathbf{k}$$

ossia

$$\mathbf{a}(t_1 t_2) \equiv x(t_1 t_2)\mathbf{i} + y(t_1 t_2)\mathbf{j} + z(t_1 t_2)\mathbf{k} ;$$

ed in generale

$$\mathbf{a}(t_1 t_2 \ldots t_n) \equiv x(t_1 t_2 \ldots t_n)\,\mathbf{i} + y(t_1 t_2 \ldots t_n)\,\mathbf{j} + z(t_1 t_2 \ldots t_n)\mathbf{k} ;$$

quindi passando al limite (*Calc. diff.* N. 86)

$$\lim \mathbf{a}(t_1 t_2) \equiv x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \equiv \mathbf{a}'(t),$$

e

$$\lim \mathbf{a}(t_1 t_2 \ldots t_n) \equiv \frac{1}{(n-1)!}\left[x^{(n-1)}(t)\,\mathbf{i} + y^{(n-1)}(t)\,\mathbf{j} + z^{(n-1)}(t)\,\mathbf{k}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(n-1)!}\,\mathbf{a}^{(n-1)}(t)\,.$$

14. Un segmento variabile **a** può essere funzione di due o più numeri u, v, ...; ed allora si avrà a parlare di tante derivate parziali del primo ordine di **a** quante sono le variabili. Le derivate di primo ordine possono avere alla loro volta derivate, che si diranno di secondo ordine, e così via. Tutte queste derivate parziali sono segmenti.

Così ad esempio, se x y z sono le coordinate del segmento **a**

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,,$$

e queste sono funzioni dei numeri u, v, ..., aventi derivate parziali, anche **a** è funzione di u, v, ... le cui derivate si ottengono derivando l'equipollenza precedente, e si ha

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} \equiv \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}\,,$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dv} \equiv \frac{dx}{dv}\mathbf{i} + \frac{dy}{dv}\mathbf{j} + \frac{dz}{dv}\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{du^2} \equiv \frac{d^2x}{du^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{du^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{du^2}\mathbf{k}, \text{ ecc.}$$

E viceversa, se $\mathbf{a}$ ha derivate parziali, lo stesso avviene delle sue coordinate.

Per le derivate parziali d'un segmento si possono dimostrare delle proposizioni analoghe a quelle dimostrate per le funzioni numeriche, e che noi ridurremo a queste per mezzo delle coordinate.

Teorema. — Se il segmento $\mathbf{a}$ è funzione dei numeri u, v,..., avente le derivate parziali di primo ordine $\frac{d\mathbf{a}}{du}$, $\frac{d\mathbf{a}}{dv}$, ..., continue, dati a u, v, ... incrementi Δu, Δv, ... l'incremento corrispondente $\Delta\mathbf{a}$ di $\mathbf{a}$, si può mettere sotto la forma

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} + \alpha\right)\Delta u + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dv} + \beta\right)\Delta v + \dots,$$

ove α, β, ... sono segmenti che hanno per limite zero ove tendano a zero Δu, Δv, ...

Infatti, riferito il segmento $\mathbf{a}$ ai segmenti $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, e posto $\mathbf{a} \equiv \mathbf{i}x + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, saranno x y z funzioni di u, v,... aventi le derivate parziali di primo ordine continue; e sarà

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}.$$

Ora gli incrementi delle funzioni numeriche x y z si possono mettere sotto la forma (*Calc. diff.* N. 105)

$$\Delta x = \left(\frac{dx}{du} + \alpha'\right)\Delta u + \left(\frac{dx}{dv} + \beta'\right)\Delta v + \dots$$

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{du} + \alpha''\right)\Delta u + \left(\frac{dy}{dv} + \beta''\right)\Delta v + \dots,$$

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{du} + \alpha'''\right)\Delta u + \left(\frac{dz}{dv} + \beta'''\right)\Delta v + \dots,$$

ove α' β'... α'' β''... α''' β''' ... sono numeri infinitesimi.

Sostituiti questi valori nella espressione di $\Delta \mathbf{a}$, ed osservando che

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} \equiv \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dv} \equiv \frac{dx}{dv}\mathbf{i} + \frac{dy}{dv}\mathbf{j} + \frac{dz}{dv}\mathbf{k}, \text{ ecc.},$$

e posto

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha'\mathbf{i} + \alpha''\mathbf{j} + \alpha'''\mathbf{k}, \quad \bar{\beta} \equiv \beta'\mathbf{i} + \beta''\mathbf{j} + \beta'''\mathbf{k}, \text{ ecc.}$$

i segmenti α, β, ... hanno per limite zero, e si ha la formula a dimostrarsi.

Se **a** è funzione dei numeri $u, v, \ldots$, e questi alla loro volta sono funzioni dello numero t, sarà **a** funzione di t, composta mediante u, v, ... Dato a t un incremento Δt, e detti Δu, Δv, ... $\Delta \mathbf{a}$ gli incrementi di u, v, ... **a**, si avrà, supposte verificate le condizioni del teorema precedente,

$$\Delta \mathbf{a} \equiv \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} + \alpha\right)\Delta u + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dv} + \beta\right)\Delta v + \ldots;$$

e dividendo per Δt

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} \equiv \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} + \alpha\right)\frac{\Delta u}{\Delta t} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dv} + \beta\right)\frac{\Delta v}{\Delta t} + \ldots.$$

Facendo ora tendere Δt a zero, se u, v, ... hanno per derivate $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \ldots$, anche **a** avrà una derivata data dalla formula

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{a}}{du}\frac{du}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dv}\frac{dv}{dt} + \ldots$$

la quale serve per derivare le funzioni composte, ed è analoga a quella vista nel *Calcolo* al N. 106.

Anche pei segmenti è lecito invertire l'ordine delle differenziazioni. Invero si ha p. e.

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{du\,dv} \equiv \frac{d^2x}{du\,dv}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{du\,dv}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{du\,dv}\mathbf{k},$$

e

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{dv\,du} \equiv \frac{d^2x}{dv\,du}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dv\,du}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dv\,du}\mathbf{k},$$

e poichè (*Calc. diff.* N. 103) $\frac{d^2x}{du\,dv} = \frac{d^2x}{dv\,du}$, ecc. si ha $\frac{d^2\mathbf{a}}{du\,dv} \equiv \frac{d^2\mathbf{a}}{dv\,du}$.

15. Le cose dette pei segmenti, sono pure applicabili alle aree ed ai volumi funzioni d'una o più variabili numeriche. Così se $\omega(t)$ è un'area avente le successive derivate $\omega'(t)$, $\omega''(t)$, ecc. sarà

$$\omega(t+h) \equiv \omega(t) + h\omega'(t) + \frac{h^2}{1.2}\,\omega''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\,[\omega^{(n)}(t) + \epsilon],$$

ove ϵ è un'area infinitesima con h.

E se $V(t)$ è un volume avente le successive derivate, sarà

$$V(t+h) = V(t) + hV'(t) + \frac{h^2}{1.2}\,V''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\,[V^{(n)}(t) + \epsilon],$$

ove ϵ è un volume infinitesimo con h.

§ 4. Derivata della posizione d'un punto.

16. Sia la posizione di un punto P funzione d'una variabile numerica t. Dati a t due valori t e $t+h$, e dette P e P′ le posizioni corrispondenti del punto, si immagini il segmento

$$\overline{PQ} \equiv \overline{PP'} : h\,;$$

diremo *derivata* del punto P il limite del segmento PQ, ove h tenda a zero.

La derivata del punto P coincide colla derivata del segmento OP, che va da una origine fissa O al punto variabile P. Invero si ha $\Delta OP \equiv OP' - OP \equiv PP'$, e quindi $\frac{\Delta OP}{h} \equiv PQ$; e facendo tendere h a zero, il membro di sinistra ha per limite la derivata del segmento OP, e il membro di destra la derivata del punto P; onde queste derivate coincidono.

La derivata del punto P è un segmento funzione di t, il quale a sua volta può avere derivata, e questa un'altra, e così via. I segmenti che così si ottengono diconsi le successive derivate del punto P; le indicheremo alcune volte colle lettere **u**, **v**, **w**, ..., altre volte con $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... Le derivate successive del punto P coincidono colle successive derivate del segmento OP.

Se il punto P ha per coordinate cartesiane x, y, z, detti **i j k** i segmenti di riferimento, si ha

$$\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,;$$

e se i numeri $x\ y\ z$ sono funzioni di t aventi le successive derivate, derivando, ed osservando che successive derivate di OP coincidono con quelle di P, si ricava per la derivata prima:

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 \equiv \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\,,$$

e per la seconda

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}_2 \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}\,,$$

ed in generale per la derivata n^a:

$$\mathbf{u}_n \equiv \frac{d^nx}{dt^n}\mathbf{i} + \frac{d^ny}{dt^n}\mathbf{j} + \frac{d^nz}{dt^n}\mathbf{k}\,,$$

e così si hanno le coordinate o componenti delle successive derivate del punto, in funzione delle derivate delle sue coordinate. Reciprocamente, se il punto ha le successive derivate, lo stesso avverrà delle sue coordinate.

17. A causa dell'identità delle derivate d'un segmento e delle derivate del punto che ne è il termine, supposta fissa l'origine, si possono estendere ai punti le formule già dimostrate pei segmenti. (p. 32, Al. 4)

Così, se P è funzione di t avente le successive derivate, pongasi $\mathrm{OP} \equiv \mathbf{a}(t)$. Le derivate $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2$ ... di P coincidono colle derivate del segmento $\mathbf{a}(t)$; e si ha

$$\mathbf{a}(t+h) \equiv \mathbf{a}(t) + h\mathbf{u}_1 + \frac{h^2}{1.2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{h^n}{n!}(\mathbf{u}_n + \bar{\epsilon})\,.$$

Ora, dette P e P′ le posizioni del punto corrispondenti ai valori t e $t+h$ della variabile, si ha $\mathbf{a}(t) \equiv \overline{OP}$, $\mathbf{a}(t+h) \equiv \overline{OP'}$, e $\mathbf{a}(t+h) - \mathbf{a}(t) \equiv \overline{PP'}$; e quindi la formula precedente diventa

$$\overline{PP'} = h\mathbf{u}_1 + \frac{h^2}{1.2}\mathbf{u}_2 + \dots + \frac{h^n}{n!}(\mathbf{u}_n + \bar{\epsilon}),$$

ove ϵ è un segmento che ha per limite zero, col tendere di h a zero.

Analogamente, se P è funzione di più numeri variabili $u, v, \dots$ avente derivate parziali di primo ordine continue, che chiameremo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$, date alle variabili gli incrementi $\Delta u, \Delta v, \dots$, e detta P′ la nuova posizione del punto, si avrà

$$\overline{PP'} \equiv (\mathbf{u} + \alpha)\Delta u + (\mathbf{v} + \beta)\Delta v + \dots,$$

ove $\alpha, \beta, \dots$ sono segmenti infinitesimi con $\Delta u, \Delta v, \dots$ E se $u, v, \dots$ sono funzioni di t aventi derivate $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, ..., il punto P è funzione di t, e la sua derivata sarà

$$\mathbf{u}\frac{du}{dt} + \mathbf{v}\frac{dv}{dt} + \dots.$$

Esercizii.

18. 1. Un segmento $\mathbf{a}$ nel piano è determinato quando si conoscano la sua lunghezza r, e l'angolo α che esso fa con una retta fissa OX del piano. Se r ed α sono funzioni d'un numero t, anche il segmento è funzione di t. La sua derivata è la risultante d'un segmento avente la direzione di $\mathbf{a}$, ed eguale in lunghezza a $\frac{dr}{dt}$, e di un segmento normale ad $\mathbf{a}$ ed eguale in lunghezza a $r\frac{d\alpha}{dt}$.

2. Se i punti P, Q, R, S.... sono funzioni di t aventi per derivate $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \dots$, la derivata del segmento $\overline{PQ}$ vale $\mathbf{q} - \mathbf{p}$; la derivata dell'area PQR vale

$$\frac{1}{2}(\overline{PQ}.\mathbf{r} + \overline{QR}.\mathbf{p} + \overline{RP}.\mathbf{q});$$

e la derivata del volume PQRS vale

$$\frac{1}{3}(PQR.\mathbf{s} - PQS.\mathbf{r} + PRS.\mathbf{q} - QRS.\mathbf{p}).$$

CAPITOLO II.

Curve piane.

---

§ 1. Tangenti alle curve in generale.

1. L'insième dei punti che godono d'una proprietà è un luogo geometrico. Questo luogo geometrico dicesi *linea* se ogni punto del luogo si può individuare mediante un numero. Esso dicesi *superficie* se ogni punto del luogo si può individuare mediante due numeri. Il modo più semplice per determinare una linea è il dare la posizione d'un punto in funzione d'una variabile t; e per determinare una superficie basta dare la posizione d'un punto in funzione di due variabili.

Ci occuperemo dapprima delle linee. Detto P un punto della linea, e t il numero che individua P, supporremo che ad ogni valore di t in un certo intervallo corrisponda un sol ~~numero t,~~ punto P in modo cioè che attribuendo a t valori distinti, anche le posizioni di P siano distinte. Supporremo inoltre che il punto P sia funzione continua di t, e viceversa, vale a dire, se P_0 e P sono le posizioni del punto corrispondenti ai valori t_0 e t della variabile, se t tende a t_0, anche P tenda a P_0, e viceversa, se P tende a P_0, anche t tenda a t_0.

Una linea dicesi *curva* quando nessuna porzione di essa giace su d'una linea retta. Una linea è piana se giace tutta in un piano. Una linea non piana dicesi *gobba*, o *a doppia curvatura*.

2. Dicesi *tangente* ad una linea in un suo punto P_0 il limite della retta che unisce il punto P_0 ad un altro punto P della linea, ove P tenda a P_0.

Si dice anche che la tangente ad una curva è la retta che unisce due punti consecutivi od infinitamente prossimi di essa, e con questa dicitura non si intende che la definizione precedente.

Per *direzione d'una linea* in un punto si intende la direzione della tangente in questo punto.

Dicesi *normale* ad una linea in un suo punto P_0 ogni retta passante per P_0 e normale alla tangente alla linea in P_0. Queste rette formano nello spazio il piano normale in P_0 alla tangente; e questo vien detto piano normale alla linea in P_0.

Se la linea è contenuta in un piano, in questo stesso piano non giace che una sola normale.

Se la linea data è una retta, la retta che unisce due suoi punti P_0 e P è la retta stessa, e facendo tendere P a P_0, il suo limite è sempre la retta data, onde la tangente in ogni punto d'una retta coincide colla retta stessa.



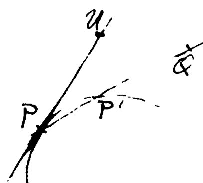
Se la linea data è un cerchio di centro C, e se P_0 e P sono due suoi punti, l'angolo che la retta P_0P fa colla perpendicolare in P_0 al raggio CP_0 contenuta nel piano del cerchio, è la metà dell'angolo dei raggi CP_0 e CP; ora col tendere di P a P_0 questi angoli hanno per limite zero, quindi la tangente al cerchio in un suo punto è la perpendicolare al raggio che va a questo punto contenuta nel piano del cerchio; vale a dire, pel cerchio, la tangente definita come limite d'una secante coincide colla retta chiamata pure tangente nella geometria elementare, ma definita diversamente.

3. La tangente ad una linea risulta determinata, ove si conosca la derivata del punto che descrive la linea, in virtù del seguente

Teorema I. — Se il punto P è funzione di t avente deri-

vata $\mathbf{u} \equiv \mathrm{PU}$ *non nulla, la retta indefinita* PU *è la tangente alla curva descritta da* P.

Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e detti P e P′ i punti corrispondenti della curva, si faccia $\overline{\mathrm{PQ}} \equiv \overline{\mathrm{PP'}} : h$. Il punto Q è un punto della retta PP′. Facciasi tendere h a zero. Il segmento PQ ha per limite la derivata PU per definizione; quindi il punto Q ha per limite U, e la retta PP′Q, che unisce i punti P e Q aventi per limiti i punti P ed U non coincidenti, ha per limite la retta PU (Cap. I, 5, teor. II), ossia PU è la tangente alla linea in P.



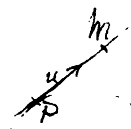
Teorema II. — *Se il punto* P *è funzione di* t *avente derivata prima continua e non nulla, la tangente in* P *è anche il limite della congiungente due punti* $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2$ *della linea, quando questi tendano al punto* P.

Invero, sia O un'origine fissa, e pongasi $\overline{\mathrm{OP}} \equiv \mathbf{a}(t)$. Sarà $\overline{\mathrm{OP}}_1 \equiv \mathbf{a}(t_1)$, $\overline{\mathrm{OP}}_2 \equiv \mathbf{a}(t_2)$, $\overline{\mathrm{P_1P_2}} \equiv \mathbf{a}(t_2) - \mathbf{a}(t_1)$.

Pongasi $\overline{\mathrm{P_1Q}} \equiv \dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{t_2 - t_1} \equiv \mathbf{a}(t_1, t_2)$. Si facciano ora tendere t_1 e t_2 a t; si ha $\lim \overline{\mathrm{P_1Q}} \equiv \lim \mathbf{a}(t_1, t_2) \equiv \mathbf{a}'(t) \equiv \overline{\mathrm{PU}}$ derivata del punto P; e poichè P_1 ha per limite P, Q ha per limite U, e la retta $\mathrm{P_1P_2Q}$ ha per limite la retta PU, cioè la tangente alla curva.

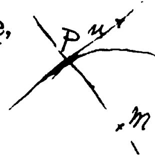
4. Se M è un punto della tangente alla curva in P, e questo punto ha derivata $\mathbf{u}$ non nulla, le direzioni di $\mathbf{u}$, e di MP coincidono, e quindi è nulla l'area $\mathbf{u}.\mathrm{MP}$. Viceversa, se quest'area è nulla, MP ha la direzione di $\mathbf{u}$, ed il punto M si trova sulla tangente. Dunque l'equazione della tangente, colla notazione dei segmenti, è

$$\mathbf{u}.\mathrm{PM} \equiv 0\,.$$



Se M è un punto della normale, o del piano normale alla curva in P, sarà MP normale ad u, e quindi l'equazione della normale, o del piano normale, è

$$\mathbf{u} \times \mathrm{MP} = 0,$$



sempre supposto che u non sia nullo. Si osservi che $2u \times MP$ è la derivata di $\overline{MP}^2$, presa nell'ipotesi che M sia fisso, e P un punto della curva. Quindi si deduce:

Se la derivata di P non è nulla, il piano normale alla curva è il luogo dei punti M per cui è nulla la derivata di $\overline{MP}^2$.

Il piano normale ad una linea in un suo punto P si può pure considerare come il limite del luogo dei punti equidistanti dai due punti P e P′ della linea, ove P′ tenda a P. Invero il luogo dei punti equidistanti da P e P′ è il piano π normale alla retta PP′ nel suo punto medio C. Ora, se P′ tende a P, anche C tende a P, e se la linea ha tangente Pt nel punto P, la retta PP′ ha per limite la Pt; ed il piano π passante per C e normale a PP′ ha per limite il piano π_0 passante P e normale alla tangente Pt; vale a dire il limite del piano π è il piano normale alla linea in P. Viceversa se il piano π tende ad un limite π_0, che passa necessariamente per P, la retta PP′ normale a π ha per limite la retta Pt normale a π_0; quindi Pt è la tangente alla curva, e π_0 il piano normale.

Questa proprietà del piano normale permette alcune volte di determinarlo direttamente, e dedurne in conseguenza la tangente alla curva. Così, se si sa che i punti A e B distano egualmente dai due punti P e P′ della curva, e se col tendere di P′ a P, A e B hanno per limiti i punti A_0 e B_0 non in linea retta con P, il piano luogo dei punti equidistanti da P e P′ ha per limite il piano PA_0B_0, e questo sarà il piano normale alla curva.

Le cose dette pel piano normale sono applicabili alla retta normale, se la linea sta in un piano fisso; in questo caso basta riconoscere che un punto A equidistante da P e P′ ha per limite A_0, per dedurre che A_0P è la normale alla curva. Così pel cerchio, il centro dista egualmente dai punti P e P′ della circonferenza; e poichè esso è fisso, ed ha per limite sè stesso, si deduce che il raggio che va ad un punto della circonferenza è normale ad essa.

5. Se, pel valore considerato di t, è nulla la derivata prima del punto, per determinare la tangente alla curva può servire il seguente

TEOREMA. — Se il punto P è funzione di t, e per $t = t_0$ sono nulle la derivata prima di P, e tutte le successive fino all'ordine p, la tangente alla linea luogo dei punti P è la retta che passa per P e contiene la derivata d'ordine p.

Invero, se le derivate successive $1^a, 2^a, \dots (p-1)^{ma}$ sono nulle, e la derivata $\mathbf{u}_p$ d'ordine p non è nulla, sarà, per la formula di Taylor:

$$\overline{PP'} \equiv \frac{h^p}{p!}(\mathbf{u}_p + \bar{\epsilon}),$$

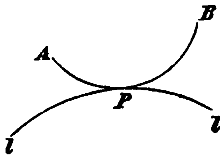
ove $\bar{\epsilon}$ è un segmento che ha con h per limite zero. Quindi, fatto $PQ \equiv \mathbf{u}_p + \bar{\epsilon}$ e $PU \equiv \mathbf{u}_p$, si deduce che i punti PP′ e Q sono in linea retta, e che il segmento PQ ha per limite PU; quindi il punto Q ha per limite U, il quale è distinto da P, perchè, per ipotesi, PU non è nullo. E la retta PP′ che passa pei punti P e Q, che hanno per limiti i punti P e U non coincidenti, ha per limite la retta PU; dunque questa è la tangente.

Si osservi però che, se la derivata prima è nulla pel valore considerato di t, anche supposte continue le derivate successive, non è più vero in generale che la tangente in P sia il limite della congiungente due punti P_1 P_2 presi ad arbitrio sulla curva, ove questi si facciano tendere al punto P.

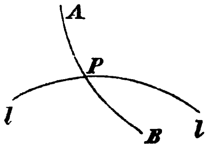
§ 2. Tangenti alle curve piane.

6. Può un piano essere diviso da una linea descritta su esso in due parti, o regioni. Così una retta AB lo divide in due parti sovrap-

ponibili, e si riconosce se due punti P e Q appartengono alla stessa parte od a parti opposte, secondochè le aree ABP e ABQ, ovvero i loro doppi AB.AP e AB.AQ hanno lo stesso senso, o senso contrario. Così pure un cerchio divide il piano in due regioni, l'una (interna) formata dei punti che distano dal centro meno del raggio, e l'altra (esterna), i cui punti distano dal centro più del raggio; ecc.



Sia un piano fisso diviso da una linea l in due parti. Diremo che una linea AB contenuta nello stesso piano *tocca* la l nel loro punto comune P, se un arco AB della linea, contenente nel suo interno il punto P, giace tutto da una stessa parte della linea l.



Diremo invece che la linea AB *taglia* la l nel loro punto comune P, se due archi PA e PB di questa linea, terminanti in P, trovansi l'uno da una parte e l'altro dall'altra della linea l.

Potrebbe anche una linea avere più punti comuni colla l, ed in alcuni di questi toccarla, ed in altri tagliarla.

Noi supporremo dapprima che la linea l sia una retta, e discuteremo se la linea descritta da un punto variabile P, che in una posizione speciale P_0 trovasi sulla retta, la tagli o la tocchi.

7. Teorema I. — Se il punto P descrive una linea piana, e se nella posizione speciale P_0 ha una derivata prima non nulla, la linea taglia ogni retta del piano passante per P_0, ma diversa dalla tangente.

Se, inoltre, la derivata seconda di P non è nulla, nè coincide in direzione colla derivata prima, la linea tocca in P_0 la tangente, e nelle vicinanze di P_0 giace da quella banda della tangente verso cui è rivolta la derivata seconda.

Infatti, sia P_0A una retta passante per P_0; e si consideri l'area $P_0P.P_0A$. Suppongasi dapprima che la P_0A non sia la tangente alla curva. Dalla formula $P_0P \equiv h(u + \varepsilon)$, con $lim \varepsilon \equiv 0$, si ricava l'area

considerata $P_0P.P_0A = h(\mathbf{u}.P_0A + \epsilon.P_0A)$. Delle due aree racchiuse in parentesi la prima $\mathbf{u}.P_0A$ è indipendente da h, e non è nulla, perchè le direzioni di $\mathbf{u}$ e P_0A sono distinte; la seconda invece $\epsilon.P_0A$ è infinitesima con h. Perciò potremo supporre h sufficientemente piccolo in valor assoluto, in modo che la seconda area sia minore della prima, e che l'area $\mathbf{u}.P_0A + \epsilon.P_0A$ abbia il senso dell'area $\mathbf{u}.P_0A$. Ciò supposto, l'area $P_0P.P_0A$ avrà il senso di $\mathbf{u}.P_0A$ se h è positivo, ed avrà senso contrario se h è negativo; quindi i punti P della curva corrispondenti a valori positivi di h stanno da una stessa parte della retta P_0A (cioè da quella verso cui è rivolta $\mathbf{u}$); invece i punti della curva che corrispondono a valori negativi di h stanno dalla parte opposta; perciò la linea descritta da P taglia in P_0 la retta P_0A.

Sia invece P_0A la tangente alla curva in P_0. Dalla formula

$$P_0P = h\mathbf{u} + \frac{h^2}{1.2}(\mathbf{v} + \epsilon.P_0A)$$

con $\lim \epsilon = 0$, osservando che l'area $\mathbf{u}.P_0A = 0$, perchè la tangente P_0A ha la direzione della derivata prima, si ricava

$$P_0P.P_0A = \frac{h^2}{2}[\mathbf{v}.P_0A + \epsilon].$$

Ora, se la $\mathbf{v}$, derivata seconda di P, non è nulla, nè coincide in direzione con $\mathbf{u}$, delle due aree racchiuse in parentesi, la prima $\mathbf{v}.P_0A$ sarà diversa da zero, mentre la seconda ha per limite zero; perciò si può supporre che $\mathbf{v}.P_0A + \epsilon$ abbia il senso del primo termine; allora, poichè il fattore $\frac{h^2}{2}$ è sempre positivo, anche l'area $P_0P.P_0A$ ha il senso di $\mathbf{v}.P_0A$, ossia, nelle vicinanze di P_0 i punti della curva trovansi da quella parte della tangente P_0A verso cui è rivolta la derivata seconda.

TEOREMA II. — **Se delle derivate del punto P, nella posizione considerata P_0, la prima non nulla è la p^{ma}, e**

delle successive la prima non nulla, nè coincidente in direzione colla p^{ma} è la q^{ma}, allora:

Ogni retta passante per P_0 e distinta dalla tangente è tagliata dalla linea se p è dispari; è invece toccata se p è pari.

La tangente in P_0 è tagliata dalla linea se q è dispari, è toccata se q è pari.

Infatti, sia P_0A una retta qualunque passante per P_0. Si consideri l'area $\omega(t) = P_0P.P_0A$. La sua derivata n^a è $\mathbf{u}_n.P_0A$, $\mathbf{u}_n$ indicando la derivata n^a di P. Per le ipotesi fatte, l'area $\omega(t)$ si annulla, per $t = t_0$, insieme alle derivate $1^a, 2^a, \ldots (p-1)^{ma}$, e la derivata p^{ma} è $\mathbf{u}_p.P_0A$, la quale non è nulla se P_0A è distinta dalla tangente. Ricorrendo alla formula di Taylor si ha

$$P_0P.P_0A = \frac{h^p}{p!}[\mathbf{u}_p.P_0A + \epsilon],$$

ove ϵ è un'area infinitesima con h; e perciò potremo supporre che l'area $\mathbf{u}_p.P_0A + \epsilon$ abbia il segno del primo termine $\mathbf{u}_p.P_0A$. Ora, se p è dispari, siccome il fattore $\frac{h^p}{p!}$ cambia segno con h, si deduce che l'area $P_0P.P_0A$ ha, per h negativo, il senso opposto di $\mathbf{u}_p.P_0A$, e per h positivo lo stesso senso. Quindi il punto P passa dalla regione del piano verso cui non è diretta $\mathbf{u}_p$ a quella verso cui questo segmento è diretto, e la linea descritta dal punto P taglia la retta P_0A. Se invece p è pari, $\frac{h^p}{p!}$ è sempre positivo, l'area $P_0P.P_0A$ ha il senso dell'area $\mathbf{u}_p.P_0A$, e quindi il punto P trovasi nelle vicinanze di P_0 da quella stessa parte della P_0A verso cui è diretta $\mathbf{u}_p$.

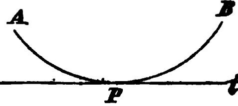
Suppongasi ora che la retta P_0A coincida colla tangente, e quindi abbia la direzione di $\mathbf{u}_p$. In virtù delle ipotesi fatte saranno pure nulle le derivate dell'area $\omega(t)$ fino a quella d'ordine q, che è $\mathbf{u}_q.P_0A$. Quindi per la formula di Taylor si ha

$$P_0P.P_0A = \frac{h^q}{q!}[\mathbf{u}_q.P_0A + \epsilon],$$

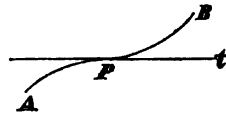
e ragionando in modo analogo, si scorge che se q è dispari, la linea

descritta da P taglia la tangente, e, se q è pari, la tocca, e trovasi, nelle vicinanze di P_0, da quella parte della tangente verso cui è rivolta $\mathbf{u}_q$.

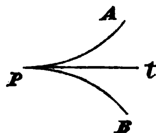
8. Si suol dire che un punto P d'una curva è un punto ordinario se la curva taglia tutte le rette diverse dalla tangente e tocca la tangente. Si dice ancora in questo caso che nel punto considerato la curva rivolge la sua *concavità* verso quella delle due parti in cui il piano è diviso dalla tangente, nella quale essa è contenuta, e rivolge la sua *convessità* verso la parte opposta. Così il punto P è un punto ordinario della curva, se ha derivata prima non nulla, e derivata seconda nè nulla nè coincidente in direzione colla derivata prima, o più generalmente, se delle derivate di P la prima non nulla è d'ordine dispari, e delle susseguenti la prima non nulla nè coincidente in direzione colla tangente è d'ordine pari.

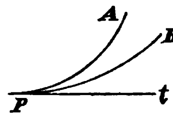


Un punto non ordinario si suol dire *singolare*. Così se la linea taglia tutte le rette passanti pel punto considerato, compresa la tangente, il che avviene quando, conservate le notazioni dell'ultimo teorema, p e q sono dispari, si ha un punto singolare, che vien chiamato *punto di flesso*.



Se la linea tocca tutte le rette diverse dalla tangente, e taglia la tangente, il che avviene se p è pari e q è dispari, si avrà un





punto detto *cuspide*, o punto di regresso di prima specie. E se la linea tocca tutte le rette passanti per il suo punto P, il che avviene quando p e q sono amendue pari, si avrà un punto di regresso di seconda specie.

Finora si è supposto che la posizione del punto P fosse funzione

di t avente le successive derivate; si è supposto inoltre che attribuendo a t due valori distinti qualunque, almeno in un certo intervallo, P assumesse pure posizioni distinte. Ma se il punto P, variando t, viene a prendere più volte una stessa posizione, questa posizione si dirà un *punto multiplo* della curva, e potrà essere un punto doppio, triplo, ecc., secondochè P passa due, tre, ecc., volte per quella stessa posizione. Altre singolarità può presentare la linea, ove il punto variabile P non abbia derivate.

9. Se l'area **u**.**v** compresa fra le derivate prima e seconda del punto P non è nulla, le derivate **u** e **v** di P sono nè nulle nè coincidenti in direzione; quindi questo punto è un punto ordinario della curva che esso descrive. Pertanto il valore dell'area **u**.**v** può servire come criterio analitico per riconoscere i punti ordinarii.

Quest'area si può pure considerare come un limite, come risulta dal teorema seguente:

Teorema. — Se il punto P è funzione di t avente le derivate **u** e **v** continue, e se, $P_1\, P_2\, P_3$ sono tre punti della curva, corrispondenti ai valori $t_1\; t_2\; t_3$ della variabile t, l'area del triangolo $P_1\, P_2\, P_3$ divisa pel numero $(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)$ ha per limite la quarta parte dell'area **u**.**v**

$$lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} = \frac{1}{4}\,\mathbf{u}.\mathbf{v},$$

ove i punti $P_1P_2P_3$ tendano ad una stessa posizione P.

Invero si ha $P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\, P_1P_2.P_1P_3$. Sia O un punto fisso ad arbitrio, e pongasi $OP = \mathbf{a}(t)$; sarà

$$OP_1 = \mathbf{a}(t_1),\quad OP_2 = \mathbf{a}(t_2),\quad OP_3 = \mathbf{a}(t_3),$$

$$\mathbf{a}(t_1, t_2) = \frac{P_1P_2}{t_1-t_2},\qquad \mathbf{a}(t_1, t_3) = \frac{P_1P_3}{t_3-t_1},$$

e

$$\mathbf{a}(t_1t_2t_3) = \frac{\mathbf{a}(t_1t_3)-\mathbf{a}(t_1t_2)}{t_3-t_2}.$$

Da queste eguaglianze si ricava

$$P_1P_2 \equiv (t_2 - t_1)\ \mathbf{a}(t_1\, t_2), \qquad P_1P_3 \equiv (t_3 - t_1)\ \mathbf{a}(t_1\, t_3),$$

e
$$\mathbf{a}(t_1 t_3) \equiv \mathbf{a}(t_1 t_2) + (t_3 - t_2)\ \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3).$$

Sostituendo si ha

$$P_1P_2P_3 \equiv \frac{1}{2}(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)\ \mathbf{a}(t_1 t_2).\mathbf{a}(t_1 t_3)$$

$$\equiv \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\ (t_3 - t_1)\ (t_3 - t_2).\mathbf{a}(t_1 t_2).\mathbf{a}(t_1 t_2 t_3)\ ,$$

e quindi

$$\frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \equiv \frac{1}{2}\ \mathbf{a}(t_1 t_2).\mathbf{a}(t_1 t_2 t_3).$$

Passando al limite, e ricordando che p. 50-51

$$lim\,\mathbf{a}(t_1 t_2) \equiv \mathbf{a}'(t) \equiv \mathbf{u}$$

e
$$lim\,\mathbf{a}(t_1 t_2 t_3) \equiv \frac{1}{2}\ \mathbf{a}''(t) \equiv \frac{1}{2}\ \mathbf{v}\,,$$

si ha la formula a dimostrarsi.

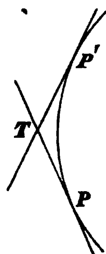
Nell'enunciato e nella dimostrazione del teorema non si suppone che la curva descritta da P sia piana; e perciò il teorema è anche vero per curve gobbe.

Dal teorema precedente si deduce che, se l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ non è nulla, anche $\frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$ sarà, per posizioni di $P_1P_2P_3$ sufficientemente prossime a P, diversa da zero; e quindi anche l'area $P_1P_2P_3$ non sarà nulla; ossia, nelle ipotesi fatte, si può determinare un arco della curva descritta da P, nelle vicinanze del punto considerato, il quale non abbia più di due punti in linea retta. Si osservi ancora, che nelle ipotesi fatte, se $t_1 < t_2 < t_3$, il triangolo $P_1P_2P_3$ ha lo stesso senso dell'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$.

Teorema. — Se l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ formata colle derivate prima

e seconda del punto P non è nulla, il punto d'intersezione delle tangenti alla curva in due suoi punti P e P' ha per limite il punto P, ove P' tenda a P.

Infatti, i punti P e P' corrispondano ai valori t e $t+h$ del parametro; e sia T il punto d'incontro delle due tangenti in questi punti.



Siccome il segmento PT sta sulla tangente, esso ha la direzione della derivata **u** del punto P, e quindi esisterà un numero x tale che $\mathrm{PT} \equiv x\mathbf{u}$. Poichè P'T sta sulla tangente alla curva in P', esso ha la direzione della derivata del punto P', che diremo **u'**, e quindi l'area $\mathrm{P'T}.\mathbf{u}' = 0$. Ora si ha

$$\mathrm{P'T} \equiv \mathrm{PT} - \mathrm{PP'} \equiv x\mathbf{u} - \mathrm{PP'}.$$

e dalla formula di Taylor si ricava

$$\mathrm{PP'} \equiv h\mathbf{u} + \frac{h^2}{1.2}(\mathbf{v} + \varepsilon)$$

e

$$\mathbf{u}' \equiv \mathbf{u} + h(\mathbf{v} + \eta);$$

sostituendo questi valori di P'T e **u'** nell'equazione $\mathrm{P'T}.\mathbf{u}' = 0$, essa diventa

$$\left[x\mathbf{u} - h\mathbf{u} - \frac{h^2}{1.2}(\mathbf{v} + \varepsilon)\right].\left[\mathbf{u} + h(\mathbf{v} + \eta)\right] = 0;$$

la si ordini rispetto alle potenze di h; osservando che il primo termine $x\mathbf{u}.\mathbf{u} = 0$ e dividendo per h, si ha

$$x\mathbf{u}.(\mathbf{v} + \eta) - h\left[\mathbf{u}.(\mathbf{v} + \eta) + \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \varepsilon).\mathbf{u}\right] = 0;$$

e passando al limite, il coefficiente di x ha per limite **u.v**, che non è nullo, mentre il secondo termine ha per limite zero; quindi $\lim x = 0$; e poichè $\mathrm{PT} \equiv x\mathbf{u}$, sarà $\lim \mathrm{PT} \equiv 0$, cioè T ha per limite P.

§ 3. Curve riferite a coordinate cartesiane.

10. Un primo modo di determinare una curva nel piano è di dare le coordinate cartesiane $x\ y$ del punto variabile P, che descrive la curva, in funzione d'una variabile t. Detti **i** ed **j** i segmenti di riferimento, sarà

$$\overline{\mathrm{OP}} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

e, per ciò che si è visto, le derivate prima e seconda **u** e **v** sono

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}.$$

Quindi, se **u** non è nullo, ossia se $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ non sono nulle ad un tempo, la direzione di **u** coincide colla direzione della tangente.

Se M è un punto della tangente, sarà $\mathbf{u}.\mathrm{PM} \equiv 0$; e dette X Y le coordinate di M, l'equazione della tangente è

$$(1)\qquad (X - x)\frac{dy}{dt} - (Y - y)\frac{dx}{dt} = 0.$$

L'equazione della normale è, se M è un punto della normale,

$$\mathbf{u} \times \mathrm{PM} = 0,$$

ovvero, supposti gli assi di riferimento ortogonali:

$$(2)\qquad (X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

E la curva, nel punto considerato, rivolge la sua concavità verso quella parte della tangente verso cui è rivolta **v**, a meno che **v** non sia nulla, o la sua direzione coincida con **u**, nel qual caso si applicheranno i criterii noti. L'area **u**.**v** si esprime nel nostro caso

sotto la forma

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j};$$

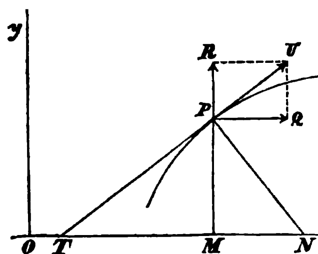
e se quindi il determinante formato colle derivate prime e seconde delle coordinate x y non è nullo, il punto è un punto ordinario della curva.

11. Come caso particolare, la variabile indipendente t potrebbe essere la stessa ascissa, e allora la curva è data nel piano dandone l'ordinata in funzione dell'ascissa:

$$y = f(x).$$

Le coordinate del punto variabile P della curva sono

$$x \text{ e } f(x),$$



e le loro derivate, ossia le coordinate della derivata di P, sono 1 e $f'(x)$; quindi la derivata PU del punto P è la risultante d'un segmento PQ parallelo all'asse delle x e misurato dal numero $+1$, e d'un segmento PR parallelo all'asse delle y, e misurato dal numero $f'(x)$.

La derivata prima di P non è mai nulla; quindi la sua direzione coincide colla direzione della tangente. Se gli assi sono ortogonali, l'angolo che la tangente PU alla curva fa coll'asse delle x ha per tangente trigonometrica $f'(x)$, come si vede dal triangolo rettangolo PQU. L'equazione della tangente si riduce a

(1') $$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

e quella della normale a

(2')
$$X - x + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Le derivate seconde delle coordinate di P sono 0 e $f''(x)$. Quindi la derivata seconda di P è un segmento parallelo all'asse delle y e misurato dal numero $f''(x)$.

Se $f''(x)$ è positivo, la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y; se $f''(x)$ è negativo, la concavità della curva è rivolta verso la direzione negativa dell'asse delle y. Se poi $f''(x) = 0$, ed $f'''(x)$ non è nullo, la curva taglia la tangente, e si ha un punto di flesso.

Il segmento PT compreso fra il punto P ed il punto d'intersezione della tangente coll'asse delle x vien detto *lunghezza della tangente*. La sua proiezione TM sull'asse delle x si chiama *sottotangente*. Il segmento PN di normale, compreso fra il punto P e l'asse delle x vien detto *lunghezza della normale;* e la sua proiezione MN sull'asse delle x si dice *sottonormale*.

Supposti gli assi di riferimento ortogonali, è facile esprimere le lunghezze di questi segmenti in funzione dell'ordinata y del punto P, e della sua derivata $\frac{dy}{dx} = y'$. Invero dai triangoli simili PQU, TMP, si ricava $\frac{\mathrm{TM}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{QU}}$, ossia $\frac{\mathrm{TM}}{1} = \frac{y}{y'}$, vale a dire la sottotangente $\mathrm{TM} = \frac{y}{y'}$.

Quindi dal triangolo rettangolo TMP si ottiene

$$\mathrm{TP} = \sqrt{\overline{\mathrm{TM}}^2 + \overline{\mathrm{MP}}^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Dai triangoli PQU e PMN simili si deduce

$$\mathrm{MN} : \mathrm{QU} = \mathrm{PM} : \mathrm{PQ}\,,$$

ossia

$$\mathrm{MN} : y' = y : 1\,,$$

onde si ricava la sottonormale

$$MN = yy'.$$

Ed infine dal triangolo rettangolo PMN si ha $PN = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{MN}^2}$, e sostituendo

$$PN = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

12. Poichè spesso una curva è definita mediante l'equazione $y = f(x)$, sarà utile il trovare direttamente i risultati precedenti.

Siano $OM = x$, e $OM' = x + \Delta x$ due ascisse, cui corrispondano le ordinate $MP = y = f(x)$, e $M'P' = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

L'equazione della retta PP', ove XY siano le coordinate di un punto di essa, è

$$(a) \qquad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x);$$

(invero quest'equazione è di primo grado, e quindi rappresenta una retta; e poichè essa è soddisfatta quando invece di X ed Y si pongano rispettivamente le coordinate (x, y) e $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ dei punti P e P', questa retta passa pei punti P e P', e quindi coincide colla PP').

Si faccia ora tendere Δx a zero. Il coefficiente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ha per limite $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, e la retta PP' di equazione (a) ha per limite la retta la cui equazione è

$$(b) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x);$$

(perchè, supposta l'ascissa X fissa, l'ordinata corrispondente data dalla (a) ha per limite l'ordinata data dalla equazione (b), e quindi tutti i punti della seconda retta sono limiti di punti della prima, e la seconda retta è il limite della prima).

Dunque la retta rappresentata dall'equazione (b) è la tangente alla curva.

Si calcoli la differenza delle ordinate M′P′ della curva, e M′Q della tangente corrispondenti ad una stessa ascissa $OM' = x + h$. Si ha per l'ordinata della curva

$$M'P' = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}\,[f''(x) + \epsilon]\,,$$

ove $lim\,\epsilon = 0$, per $h = 0$; l'ordinata M′Q della tangente è data dalla (*b*), ove si faccia $X = x + h$, e si ha

$$M'Q = y + \frac{dy}{dx}\,h = f(x) + hf'(x)\,;$$

e sottraendo

$$M'P' - M'Q = \frac{h^2}{2}\,[f''(x) + \epsilon]\,, \quad (lim\,\epsilon = 0).$$

Se ora $f''(x)$ è positivo, si può supporre h sufficientemente piccolo in modo che $f''(x) + \epsilon$ sia pure positivo, ed allora, poichè $\frac{h^2}{2}$ è sempre positivo, sarà $M'P' - M'Q > 0$, ossia l'ordinata M′P′ della curva è maggiore dell'ordinata corrispondente M′Q della tangente, e la curva sta nelle vicinanze del punto P, da quella parte della tangente verso cui è rivolta la direzione positiva dell'asse della y; in altre parole la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y. La curva rivolgerebbe invece la sua concavità dalla parte opposta, se $f''(x)$ è negativo.

13. Parabole. — Si suol dare questo nome ad ogni curva la cui equazione in coordinate cartesiane si può mettere sotto la forma

$$y = ax^m\,,$$

ove m è un esponente qualunque, intero o fratto o incommensurabile, positivo o negativo, che dicesi anche *ordine* della parabola.

Se $m = 2$, ovvero $= \frac{1}{2}$, la curva coincide colla parabola conica, il cui asse è oy nel primo caso, ed ox nel secondo. Per $m = 1$,

la linea è una retta passante per l'origine. Se $m=3$, la curva si chiama parabola cubica, e se $m=\frac{3}{2}$, vien detta parabola semicubica. Se $m=-1$, la curva è un iperbole riferita ai suoi assintoti.

Se m è intero e positivo, la funzione ax^m è definita per tutti i valori di x; lo stesso avviene se m è intero e negativo, tolto il valore speciale $x=0$, per cui la y diventa infinita.

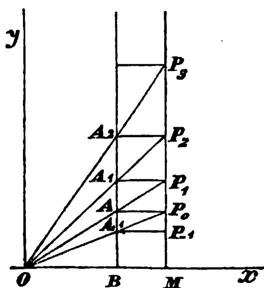
Se m è un intero pari (positivo o negativo) l'asse delle y è un asse di simmetria della linea; invero dati ad x due valori eguali e di segno contrario x e $-x$, i valori corrispondenti dell'ordinata sono eguali, e quindi i due punti della curva, aventi la stessa ordinata ed ascisse eguali ma di segno contrario, sono simmetrici rispetto all'asse delle y.

Se m è un intero dispari, l'origine è un centro della curva. Invero i due punti della curva di ascisse x e $-x$, hanno per ordinate ax^m e $-ax^m$, e quindi sono simmetrici rispetto all'origine.

Se m è fratto, o incommensurabile, per non fare una troppo lunga discussione, supporremo x positivo, e prenderemo per x^m il solo valore aritmetico.

Invece di dare il coefficiente numerico a possiamo dare un punto A per cui la curva passa. Se $x_0=\text{OB}$ e $y_0=\text{BA}$ sono le coordinate di A, dovrà essere $y_0=ax_0{}^m$; e quindi, eliminando a, l'equazione della parabola diventa:

$$\frac{y}{y_0}=\left(\frac{x}{x_0}\right)^m.$$



Sia $\text{OM}=x$ un' ascissa arbitraria. Si vogliono costrurre le ordinate corrispondenti delle varie parabole, per tutti i valori interi, positivi o negativi dell'esponente m.

La retta OA incontri la parallela all'asse delle y condotta per M in P_1, e sia $MP_1=y_1$. Si ricava dai triangoli simili OMP_1 e OBA

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{x}{x_0}.$$

Per P_1 si conduca la parallela all'asse delle x, che incontri BA in A_1, e si segni OA_1, che incontra MP_1 in P_2, e sia $MP_2 = y_2$. Dai triangoli simili OMP_2 e OBA_1 si ricava

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{x_0},$$

e quindi

$$\frac{y_2}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2.$$

Per P_2 si conduca la parallela ad Ox, che incontri la BA in A_2, e si segni OA_2 che incontra MP_1P_2 in P_3. Si ricava in modo analogo, posto $MP_3 = y_3$,

$$\frac{y_3}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^3;$$

e così via.

Per A si conduca la parallela ad Ox, che incontri MP_1 in P_0; sarà $MP_0 = y_0$. La OP_0 incontri BA in A_{-1}; per A_{-1} si conduca la parallela ad Ox, che incontri MP_0 in P_{-1}. Posto $MP_{-1} = y_{-1}$, si avrà

$$\frac{y_{-1}}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-1},$$

e così via.

Pertanto $y_1, y_2, y_3, \ldots y_0, y_{-1}, \ldots$ sono le ordinate corrispondenti all'ascissa x, delle parabole di esponenti 1, 2, 3, ... 0, — 1, ..., e P_1, P_2, P_3, ... P_0, P_{-1}, ... i punti d'intersezione della parallela all'asse delle y condotta per M con queste varie parabole. Variando M, i punti P_1, P_2, P_3, ... P_0, P_{-1}, ... descrivono le parabole corrispondenti a tutti gli esponenti interi, positivi o negativi.

La derivata in un punto P della parabola d'ordine m si ottiene segnando: 1° il segmento PQ parallelo all'asse delle x, ed eguale all'unità di misura; 2° il segmento PR parallelo all'asse delle y e misurato

dalla derivata di ax^m, ossia max^{m-1}; la loro risultante PU è la derivata del punto P, e la sua direzione è la direzione della tangente.

Se T è il punto d'intersezione della tangente coll'asse delle x, e quindi TM è la sottotangente, si ha

$$TM : PQ = MP : QU\,, \text{ ossia } TM : 1 = ax^m : max^{m-1},$$

da cui

$$TM = \frac{1}{m}\,x,$$

ossia nella parabola d'ordine m la sottotangente è l'm^a parte dell'ascissa. Questa proprietà permette di costrurre facilissimamente la tangente ad ogni parabola.

Così, se $m = 2$ (parabola conica), se P è un punto della curva, sia T il punto medio dell'ascissa OM; sarà PT la tangente alla curva. Se $m = -1$ (iperbole), si prenda TM $= -$OM, vale a dire MT $=$ OM; la PT è la tangente cercata. Ecc. ecc.

La derivata seconda di $f(x) = ax^m$ è $y'' = m\,(m-1)\,ax^{m-2}$, e dal suo segno si può dedurre da che parte la curva rivolga la sua concavità.

Supposto $a > 0$, se ad x si attribuiscono soli valori positivi, allora:

Se $m > 1$, sarà $y'' > 0$, e la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y;

Se $1 > m > 0$, sarà $y'' < 0$, e la curva rivolge la sua concavità verso la direzione negativa dell'asse delle y;

Se $m < 0$, sarà $y'' > 0$, e la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva delle y;

Se $m = 1$, ovvero $m = 0$, la linea si riduce ad una retta, e non si ha più a parlare di concavità.

Quando ad x si possano anche dare valori negativi (nel qual caso supporremo m intero, e diverso da zero e da uno, e quindi $m(m-1)$ sempre positivo) si dedurrà che la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva delle y se m è pari, verso la negativa, se m è dispari.

Nel caso speciale della parabola conica di equazione $y^2 = 2px$,

si ha una proprietà, da cui deriva una nuova costruzione della tangente. Invero, derivando quest'equazione si ha $yy' = p$. Ora il membro di sinistra rappresenta la sottonormale; dunque in questa curva la sottonormale è costante.

14. Curva logaritmica. — Con questo nome si chiama la curva di equazione $y = a^x$, ove a è una costante positiva, che supporremo maggiore di 1.

Attribuendo ad x i valori interi

$$\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

l'ordinata y assume i valori

$$a^{-2},\ a^{-1},\ a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^2,\ a^3, \ldots$$

Questi segmenti si costruiscono con facilità segnando due rette OA_0 e OA_1 partenti da un punto O, e su esse i segmenti $OA_0 = a^0 = 1$, e $OA_1 = a^1 = a$. Si costruiscano i triangoli OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ... e $OA_{-1}A_0$, $OA_{-2}A_{-1}$, ... simili ad OA_0A_1. Si vede immediatamente che $OA_2 = a^2$, $OA_3 = a^3$, ... $OA_{-1} = a^{-1}$, $OA_{-2} = a^{-2}$, ecc.

Conoscendo le ordinate a^x ed $a^{x'}$ corrispondenti a due ascisse x ed x', si può determinare l'ordinata corrispondente all'ascissa media $\frac{x+x'}{2}$; quest'ordinata è $a^{\frac{x+x'}{2}} = \sqrt{a^x . a^{x'}}$, ossia è la media geometrica delle ordinate a^x ed $a^{x'}$, e quindi si può costrurre colla riga e col compasso. In tal modo si possono costrurre infiniti punti della curva, e tanto prossimi quanto si vuole.

Per trovare la tangente alla curva nel punto P di ascissa x, basta segnare $PQ = 1$, e poi $QU = a^x \log a$; la retta PU sarà la tangente cercata. Se essa incontra l'asse delle x in T, il triangolo TMP è simile al triangolo PQU; quindi si ha

$$\frac{TM}{PQ} = \frac{MP}{QU},$$

e sostituendo a PQ, MP, QU i loro valori 1, a^x, $a^x \log a$, si deduce

$$\mathrm{TM} = \frac{1}{\log a},$$

ossia *nella curva logaritmica la sottotangente TM è costante*, qualunque sia il punto della curva. Questa proprietà permette di costrurre con facilità la tangente alla curva in ogni suo punto.

Siccome poi la derivata seconda di P è un segmento parallelo all'asse delle y e misurato da $a^x \log^2 a$, che è positivo, si deduce che la curva rivolge sempre la concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y.

15. Sia $f(x, y) = 0$ una equazione fra le coordinate cartesiane x ed y d'un punto nel piano. Se questa equazione determina una delle coordinate, p. e. la y come funzione implicita di x, il che avviene quando pei valori di x ed y considerati non è $\frac{df}{dy} = 0$, si avrà nel piano una curva.

La derivata $\frac{dy}{dx}$ è data dall'equazione

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dy} = 0,$$

da cui si ricava

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

e sostituendola nell'equazione della tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\,(X - x),$$

fatti sparire i denominatori, e trasportando tutto nel primo membro, l'equazione della tangente diventa

$$\frac{df}{dx}\,(X - x) + \frac{df}{dx}\,(Y - y) = 0.$$

In essa oltre, alle coordinate X ed Y d'un punto della tangente compaiono ancora le coordinate x y del punto di contatto, le quali non sono indipendenti, ma legate dalla relazione $f(x, y) = 0$. Quindi, combinando in vario modo l'equazione precedente con quella della curva, all'equazione della tangente si possono dare varie forme.

Esempio. — Sia l'equazione $f(x, y) = 0$ di secondo grado in x ed y

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fg + c = 0.$$

Si avrà

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dx} = ax + hy + g, \quad \frac{1}{2}\frac{df}{dy} = hx + by + f,$$

e l'equazione della tangente diventa

$$(ax + hy + g)\ (X - x) + (hx + by + f)\ (Y - y) = 0,$$

ovvero ordinando

$$(ax + hy + g)\ X + (hx + by + f)\ Y -$$
$$- (ax^2 + 2hxy + by^2 + gx + fy) = 0,$$

ed aggiungendo a questa equazione quella della curva, si otterrà infine

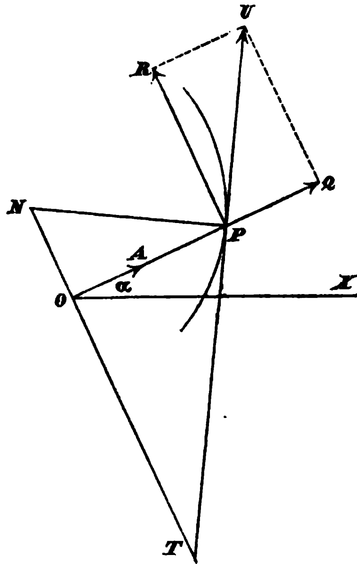
$$(ax + hy + g)\ X + (hx + by + f)\ Y + gx + fy + c = 0.$$

§ 4. Curve riferite a coordinate polari.

16. Un punto P nel piano può essere dato in coordinate polari mediante l'angolo α che la retta che lo congiunge ad un punto fisso O, detto origine o polo, fa con una retta fissa OX, detta asse polare, e mediante il numero r che misura la distanza OP. I numeri r ed α diconsi coordinate polari del punto P. Ad α si dà anche il nome di *raggio vettore*, e quello di *argomento* ad α.

Se α è una variabile indipendente, ed r una funzione di α

$$r = \varphi(\alpha),$$



la posizione del punto di coordinate r ed α, dipende dalla sola variabile α, e variando questa, il punto descrive una linea piana.

Sia $\overline{\mathrm{OA}} \equiv \mathbf{a}$ il segmento eguale all'unità di misura, e che fa l'angolo α coll'asse polare. Sarà

$$\overline{\mathrm{OP}} \equiv r\mathbf{a}.$$

Si derivi questa equipollenza. Detti r' e $\mathbf{a}'$ le derivate di r ed $\mathbf{a}$ ed osservando che la derivata di OP coincide colla derivata di P, che diremo $\mathbf{u}$, si ha

$$\mathbf{u} \equiv r'\mathbf{a} + r\mathbf{a}';$$

il che dice che la derivata PU del punto P è la risultante di due segmenti $r'\mathbf{a}$ e $r\mathbf{a}'$. Il primo $r'\mathbf{a}$ è un segmento avente la stessa direzione di OA, ossia di OP, e misurato dal numero $r' = \frac{dr}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$, e sia PQ; l'altro $r\mathbf{a}'$ si ottiene ricordando che la derivata $\mathbf{a}'$ del segmento variabile $\mathbf{a}$ è un segmento eguale ad $\mathbf{a}$, ossia all'unità, e perpendicolare ad OA (Cap. I, N. 9, V); quindi $r\mathbf{a}'$ è un segmento PR eguale al raggio vettore OP e perpendicolare ad esso.

p.45

Detto θ l'angolo che la derivata PU, ossia la direzione della tangente, fa col raggio vettore, si ricava dal triangolo rettangolo QPU:

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\mathrm{QU}}{\mathrm{PQ}} = \frac{r}{r'} = \frac{r\,d\alpha}{dr}.$$

Sia PN la normale alla curva in P, ON la perpendicolare in O al raggio vettore OP ed N il loro punto d'intersezione. Sarà il

triangolo OPN eguale al triangolo QUP, e quindi ON = PQ, e PN = PU. Perciò la lunghezza del segmento ON, che dicesi *sottonormale polare*, è $ON = r' = \frac{dr}{d\alpha}$.

La tangente alla curva in P incontri la perpendicolare ON al raggio vettore OP nel punto T. Al segmento OT si suol dare il nome di *sottotangente polare*. Dal triangolo rettangolo OPT si ricava in valor assoluto $OT = OP \tang\theta$, ossia, sostituendo

$$OT = \frac{r^2}{r'} = \frac{r^2 d\alpha}{dr}.$$

Le lunghezze PN e PT diconsi anche *lunghezza della normale* e *della tangente*. Si ha dalla figura

$$PN = \sqrt{\overline{PO}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{r^2 d\alpha^2 + dr^2}}{d\alpha},$$

$$PT = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OT}^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{r'^2}} = \frac{r}{r'}\sqrt{r'^2 + r^2} = \frac{r}{dr}\sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2}.$$

La derivata seconda del punto P è

$$\mathbf{v} \equiv r''\mathbf{a} + 2r'\mathbf{a}' + r\mathbf{a}'',$$

cioè è la risultante: del segmento $r''\mathbf{a}$, ossia di un segmento avente la direzione di OA, e misurato dal numero r''; del segmento $2r'\mathbf{a}'$, ossia d'un segmento la cui direzione fa un angolo retto con OA, e misurato dal numero $2r'$; e del segmento $r\mathbf{a}''$, ossia d'un segmento la cui direzione è opposta a quella di OA, e misurato dal numero r.

L'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ vale nel nostro caso $(r'\mathbf{a} + r\mathbf{a}').(r''\mathbf{a} + 2r'\mathbf{a}' + r\mathbf{a}'')$, ovvero sviluppando e ricordando che $\mathbf{a}'' \equiv -\mathbf{a}$, si trova

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (2r'^2 - rr'' + r^2)\mathbf{a}.\mathbf{a}'.$$

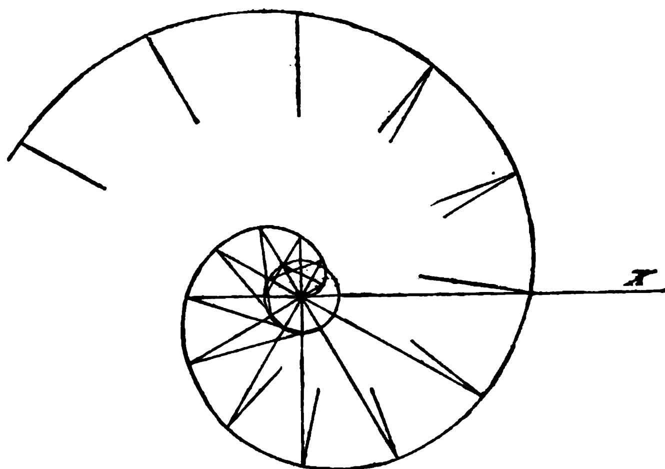
L'area $\mathbf{a}.\mathbf{a}'$ compresa fra due segmenti eguali all'unità di misura, ed ortogonali, è l'area unità di misura; quindi l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ è misurata dal numero $2r'^2 - rr'' + r^2$.

17. Spirale d'Archimede. — Pongasi $r = a\alpha$, ove a è una costante arbitraria. Si avrà una curva, detta spirale d'Archimede (ἕλιξ).

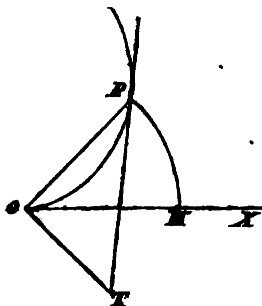
In essa r varia proporzionalmente ad α. Quindi, conoscendo un punto A della curva, se ne possono ottenere infiniti altri, segnando

delle rette OB, OC, ... che facciano coll'asse polare OX angoli multipli, o summultipli di AOX, e poi portando su esse raggi vettori multipli o summultipli di OA secondo la stessa ragione.

La sottonormale ON, che in generale vale $\frac{dr}{d\alpha}$, nel nostro caso si riduce ad a ed è costante. Dunque **nella spirale d'Archimede la sottonormale ha una lunghezza costante.**



Questa proprietà permette di costrurre con grande facilità la normale, e quindi la tangente alla curva.



Invece della sottonormale si può calcolare la sottotangente polare, che vale $r^2 \frac{d\alpha}{dr}$, ossia, nel nostro caso, $OT = a\alpha^2$. Se si descrive con centro O e con raggio OP l'arco di cerchio PM compreso fra il punto P e l'asse OX, sarà appunto l'arco PM eguale ad $a\alpha^2$; quindi la sottotangente OT è eguale in lunghezza all'arco di cerchio di raggio OP, e di ampiezza l'angolo POX.

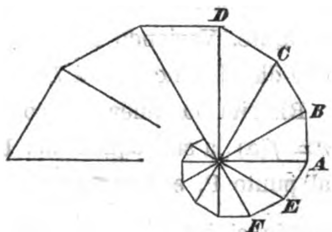
La tangente trigometrica dell'angolo $\theta = OPT$ vale $\frac{rd\alpha}{dr} = \alpha$, e quindi col crescere indefinitamente di α anche θ cresce, ed ha per limite un retto.

18. Spirale logaritmica. — Chiamasi con questo nome la curva la cui equazione è $r = Ce^{a\alpha}$, ove C ed a sono due costanti, ed e è la base dei logaritmi naturali.

Se $a = 0$, si deduce $r = C$, ossia la spirale logaritmica è in questo caso un cerchio.

Se a non è nullo, variando C si hanno infinite spirali, che però non sono che posizioni distinte d'una stessa curva. Invero, se si prende per nuovo asse polare una retta passante per lo stesso polo, ma che faccia l'angolo ω coll'antico asse polare, di un punto qualunque del piano non si altera il raggio vettore, mentrechè, chiamando α' il nuovo argomento, si avrà $\alpha' = \alpha - \omega$. Quindi l'equazione della curva diventa $r = Ce^{a(\alpha' + \omega)} = Ce^{a\omega}\, e^{a\alpha'}$, che ha la stessa forma della primitiva, salvochè invece della costante C trovasi $Ce^{a\omega}$, e prendendo convenientemente ω si può fare in modo che essa assuma il valore che più ci piace.

Quindi, senza ledere la generalità della curva, si può supporre $C = 1$, e la sua equazione ridotta alla forma $r = e^{a\alpha}$.



Una proprietà notevole di questa curva è la seguente. Se OA, OB e OC, OD sono due coppie di raggi vettori che vanno ai punti ABCD della curva, ed esse sono egualmente inclinate fra loro, ossia se l'angolo AOB è eguale all'angolo COD, allora i triangoli OAB ed OCD sono simili. Invero, detti α, β, γ, δ gli argomenti di questi raggi vettori, sarà in valor assoluto

$$\frac{OB}{OA} = e^{a(\beta - \alpha)} \qquad \frac{OD}{OC} = e^{a(\delta - \gamma)},$$

e siccome $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, perchè le coppie di raggi vettori sono egualmente inclinate fra loro, si ha $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$, e quindi i triangoli OAB e OCD, che hanno gli angoli in O eguali e i lati che li comprendono proporzionali, sono simili.

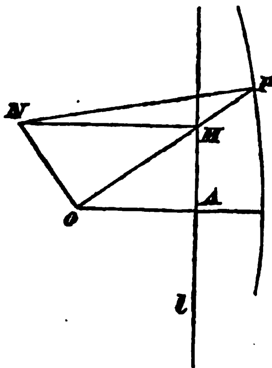
Perciò, se della spirale si conoscono il polo O e due punti A e B, se si costruiscono i triangoli OBC, OCD, ... simili ad OAB, si hanno

infiniti punti C, D,.... della spirale, che vanno in un senso; e se si costruiscono i triangoli OEA, OFE, ... pure simili ad OAB, si hanno altri punti E, F, ... che procedono in senso opposto. Inoltre, se OA e OB sono due raggi vettori, se si segna la bissetrice del loro angolo, ed OH è il raggio vettore che corrisponde a questa bissetrice, dovranno i triangoli OAH ed OHB essere simili e quindi OH è media proporzionale fra OA ed OB, e si sa costrurre colla riga e col compasso. In tal modo si possono determinare sulla curva infiniti altri punti, tanto prossimi quanto si vuole.

Continuando a chiamare θ l'angolo fatto dalla tangente alla curva col raggio vettore, si ha, nel nostro caso, $tang\theta = \frac{1}{a}$, ossia è costante, ed anche θ risulta costante. Quindi la spirale logaritmica taglia sotto angolo costante tutti i raggi vettori.

19. Concoidi. — Sia nel piano una linea l. Da un punto O del piano si conduca la retta OM ad un punto qualunque M della linea l, e si porti sulla direzione OM un segmento MP di lunghezza costante. Variando M sulla linea l, il punto P descriverà una linea, che dicesi concoide di l, rispetto al polo O.

Riferita la linea l a coordinate polari, di cui O è il polo, sia $r = f(\alpha)$ la sua equazione. Detto r_1 il raggio vettore corrispondente al punto P, e h la lunghezza costante MP, sarà $r_1 = r + h$. Derivando si ha $\frac{dr_1}{d\alpha} = \frac{dr}{d\alpha}$. Ma $\frac{dr}{d\alpha}$ e $\frac{dr_1}{d\alpha}$ sono le sunnormali della linea l, e della sua concoide, quindi la concoide d'una linea ha la stessa sottonormale polare della linea data.



Questa proprietà permette di trovare immediatamente la tangente alla concoide conoscendo la tangente alla curva primitiva, e dà luogo alla seguente costruzione:

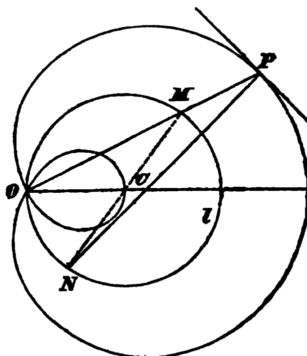
Si segni la ON ⊥ OMP, fino ad incontrare la normale in M alla l nel punto N. La retta NP è la normale cercata.

Se la linea l è una retta, la concoide assume il nome di *concoide di Nicomede*. Se si prende per asse polare la perpendicolare OA abbassata da O sulla l, l'equazione della retta è $r = \frac{a}{\cos\alpha}$, e quella della concoide

$$r = \frac{a}{\cos\alpha} + h.$$

Si vede che la curva è simmetrica rispetto alla retta OA. Se M è un punto di l, e P il corrispondente della concoide, segnato MN ⊥ l, e ON ⊥ OM, la NP è la normale alla concoide in P.

Altro caso importante di concoidi è quello in cui la linea l è un cerchio, ed il punto O sta sulla circonferenza. Essa dicesi *lumaca di Pascal*. Questa curva ha forme differenti, secondochè il segmento h è maggiore, o eguale o minore del diametro del cerchio. Se h è eguale al diametro del cerchio, la curva dicesi anche *cardioide*. Presa per asse polare la retta OC che va al centro C del cerchio, detto a il raggio del cerchio, sarà $OM = 2a\cos\alpha$, e quindi l'equazione della concoide è



$$r = 2a\cos\alpha + h.$$

La normale alla curva in P si ottiene segnando il diametro MCN; sarà ON la sottonormale, ed NP la normale cercata.

20. Cissoidi, ecc. — Siano nel piano due linee l_1 ed l_2. Da un punto O si conduca la retta OP_1P_2 ad incontrare le due linee l_1 ed l_2 in P_1 e P_2; e si segni sulla retta OP_1P_2 un punto P tale che $OP = OP_1 \pm OP_2$. Variando la direzione della retta OP, il punto P descriverà una linea l. Si vuol trovare la tangente alla l in P conoscendo le tangenti in P_1 e P_2 alle l_1 ed l_2.

Detti r_1, r_2, r i raggi vettori corrispondenti a P_1 P_2 e P, sarà

$r = r_1 \pm r_2$, e quindi $\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dr_1}{d\alpha} \pm \frac{dr_2}{d\alpha}$; ossia la sottonormale della l in P è la somma o differenza delle sottonormali di l_1 e l_2 in P_1 e P_2. Da ciò una costruzione semplicissima della normale alla curva.

Sia p. e. la linea l_1 una retta AP_1, la l_2 un cerchio C tangente alla retta in A, e il punto O sia l'altro estremo del diametro passante per A. Preso $OP = OP_1 - OP_2 = P_2P_1$, si avrà come luogo dei punti P una curva, detta *cissoide di Diocle*. Essa è simmetrica rispetto alla retta OA. Posto $OA = a$, si deduce $OP_1 = \frac{a}{\cos\alpha}$, $OP_2 = a\cos\alpha$, e quindi l'equazione della cissoide è

$$r = \frac{a}{\cos\alpha} - a\cos\alpha = a\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

La costruzione della normale alla curva in P si otterrà nel seguente modo: La retta P_2C incontri in N_2 il cerchio; segnata la retta indefinita ON_2, il segmento ON_2 sarà la sottonormale del cerchio. Da P_1 si innalzi la $P_1N_1 \perp AP_1$ che incontri ON_2 in N_1; poi si segni $\overline{ON} \equiv \overline{ON_1} - \overline{ON_2} \equiv \overline{ON_1} + \overline{N_2O} \equiv \overline{N_2N_1}$. La NP è la normale cercata.

Le linee l ed l_2 possono anche essere archi di una stessa curva. Così se da un punto O contenuto nel piano d'un cerchio C si conduce una trasversale OP_2P_1 a questo cerchio, e si porta su questa trasversale il segmento $OP = OP_1 - OP_2 = P_2P_1$, si avrà come luogo dei punti P una curva. Per condurre la normale a questa curva, si segni la $\perp$ in O al raggio OPP_2P_1, che incontri il raggio del

cerchio passante per P_1 in N_1, e il raggio passante per P_2 in N_2. Si porti $ON = ON_1 - ON_2 = N_2N_1$. Sarà PN la normale cercata.

Se si prende per asse polare la retta OC, e si chiamano r ed α le coordinate polari di P, a il raggio del cerchio C, e b la distanza OC, l'equazione della curva ottenuta nel modo testè indicato è

$$r = 2\sqrt{a^2 - b^2 \text{sen}^2\alpha}.$$

La curva ha forme diverse secondochè O è esterno od interno al cerchio. Nel caso in cui le tangenti condotte da O al cerchio siano ortogonali, dicesi *lemniscata*.

Più generalmente, se da un punto O si conduce una retta ad incontrare in $P_1 P_2 \ldots P_n$ n linee date, e si porta su essa un segmento

$$OP = m_1 OP_1 + m_2 OP_2 + \ldots\ldots + m_n OP_n,$$

ove $m_1 m_2 \ldots\ldots m_n$ sono numeri arbitrarii, dette $N_1 N_2 \ldots N_n$ N le estremità dalle sottonormali corrispondenti, sarà:

$$ON = m_1 ON_1 + m_2 ON_2 + \ldots + m_n ON_n.$$

Sia ancora, come nella cissoide, C un cerchio, O un punto della circonferenza, OCA un diametro, e AP_1 la perpendicolare ad esso in A. Segnata la OP_2P_1 che incontra il cerchio in P_2 e la retta in P_1, sia P′ il loro punto medio. Il luogo dei punti P′ è una curva, detta *visiera di Agnesi* (fig. a pag. 86).

Si ha $OP' = \frac{OP_1 + OP_2}{2}$; quindi l'equazione di questa curva è

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos\alpha} + a\cos\alpha\right),$$

e la sua normale in P′ si ottiene segnando il diametro P_2CN_2; poi ON_2; in seguito $P_1N_1 \parallel OA$, che incontri ON_2 in N_1; detto N′ il punto medio di N_1 ed N_2, sarà N′P′ la normale cercata.

§ 5. Proiezioni e inversione.

21. Proiezioni. — Se si proiettano i punti d'una figura sopra un piano π, o con raggi paralleli ad una data direzione, ovvero con raggi che partono da un centro di proiezione O, si otterrà nel piano π una figura, che dicesi proiezione parallela o centrale della prima.

Ogni punto P dello spazio ha per proiezione un punto determinato ed accessibile, eccettuati i casi in cui P coincide col centro O di proiezione, ovvero in cui il raggio OP risulta parallelo al piano di proiezione. Ogni retta ha per proiezione una retta, salvochè o la retta sia essa stessa un raggio di proiezione, ovvero il piano che la proietta risulti parallelo al piano π. Noi escluderemo, in ciò che segue, questi casi eccezionali, ed allora risulta dai teoremi del Cap. I, 6, che:

Se il punto P ha per limite P_0, la proiezione di P ha per limite la proiezione di P_0.

Se la retta r ha per limite r_0, la proiezione di r ha per limite la proiezione di r_0.

Teorema. — La proiezione della tangente ad una curva in un suo punto è la tangente alla proiezione della curva nel punto corrispondente.

Infatti, se P e P' sono due punti della curva C che si proietta, e M ed M' sono le loro proiezioni, la retta MM' è la proiezione di PP'. Si faccia tendere P' verso P; la PP' ha per limite la tangente alla curva descritta da P, e la sua proiezione MM' ha per limite la proiezione di questa tangente; dunque la retta MM' che unisce i punti M ed M' della proiezione della curva data tende verso un limite ossia questa curva proiezione ha tangente, e questa tangente è la proiezione della tangente alla curva considerata.

Siccome le coniche si possono considerare come proiezioni d'un cerchio, dalla proposizione precedente si deduce la costruzione della tangente alle coniche.

22. Inversione. — Sia O un punto fisso nel piano, e k un numero dato. Ad ogni punto P del piano si faccia corrispondere il punto Q della retta OP, tale che

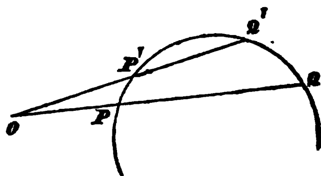
$$OP \times OQ = k^2.$$

Il punto Q, che è determinato, ove sia dato P, salvochè P coincida in O, dicesi *l'inverso* di P; se P descrive una linea, Q descriverà una linea che dicesi *l'inversa* di quella descritta da P. Il punto O vien detto centro d'inversione.

Se PQ e P'Q' sono due coppie di punti corrispondenti, sarà $OP \times OQ = OP' \times OQ'$, e quindi i punti P, Q, P', Q' stanno su d'uno stesso cerchio.

Teorema. — La normale alla linea descritta da P, la normale alla linea descritta dal suo inverso Q, e la perpendicolare nel punto medio di PQ passano per uno stesso punto.

Infatti, siano P e P' due posizioni di P, e Q e Q' i loro punti inversi. Poichè PP'QQ' stanno su d'uno stesso cerchio, la perpendicolare nel punto medio di PP', la perpendicolare nel punto medio di PQ, e la perpendicolare nel punto medio di QQ' passano per uno stesso punto C, che è il centro del cerchio.



Si passi al limite. La prima perpendicolare ha per limite la normale alla linea descritta da P; la seconda perpendicolare non varia; il loro punto d'intersezione C ha per limite il punto d'intersezione della normale alla curva data colla perpendicolare nel punto medio di PQ, il quale punto chiameremo ancora C; quindi la terza perpendicolare ha per limite la retta CQ; ma il limite di questa terza per-

pendicolare, ossia della perpendicolare nel punto medio di QQ', è la normale alla curva descritta da Q (N. 5): dunque anche questa curva ha normale e le normali alle linee descritte da P e Q passano per un punto C della perpendicolare nel punto medio di PQ.

Dal triangolo isoscele CPQ si ricava che le normali alle due curve inverse fanno angoli eguali e di senso opposto col raggio OPQ; quindi anche le tangenti alle due curve nei punti P e Q fanno con OPQ angoli eguali, e di senso opposto, e si incontrano in un punto della perpendicolare nel punto medio di PQ.

Esercizii.

23. 1. Costrurre la tangente alla curva (*sinusoide*) di equazione:

$$y = \operatorname{sen} x$$

ovvero, più generalmente

$$y = b \operatorname{sen} \frac{x}{a}.$$

Tutti i punti d'intersezione di questa curva coll'asse delle x sono centri, e punti di flesso; e le perpendicolari all'asse delle x nei loro punti di mezzo sono assi di simmetria.

2. Costrurre la curva di equazione

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

e determinare la tangente in un suo punto qualunque. Questa curva dicesi *catenaria*.

3. Costrurre la curva (*spirale iperbolica*) la cui equazione in coordinate polari è

$$r = \frac{a}{\alpha}.$$

Dimostrare che la sua sottotangente polare è costante. Essa ha un assintoto parallelo all'asse polare, alla distanza a da esso.

4. Se si hanno due curve riferite a coordinate cartesiane

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \varphi(x),$$

e si determina una terza curva, la cui ordinata sia media fra le ordinate delle due curve precedenti

$$y=\frac{f(x)+\varphi(x)}{2},$$

le tangenti nei punti corrispondenti alle due curve date e la tangente alla terza curva concorrono in un punto.

Lo stesso avviene se l'ordinata della terza curva è funzione lineare delle ordinate delle curve date, della forma

$$y=\frac{mf(x)+n\varphi(x)}{m+n},$$

ove m ed n sono numeri costanti.

5. Sia, nel piano, O un punto fisso, e OP il segmento risultante d'un segmento costante in lunghezza, ma variabile in direzione, e d'un segmento di direzione costante, e la cui lunghezza sia proporzionale all'angolo che il primo segmento fa con una retta fissa. Trovare la derivata del segmento OP, e quindi la tangente alla curva descritta da P (*cicloide*).

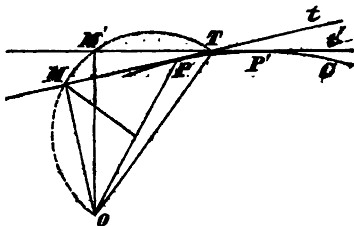
6. Nel piano sia ancora O un punto fisso, ed OP il segmento risultante di due segmenti **a** e **b**, di lunghezza costante, e che fanno con una retta fissa del piano angoli funzioni lineari d'una stessa variabile t. Trovare la derivata di OP, e quindi la tangente alla curva descritta da P (*epicicloide*).

7. Sia C una curva avente in ogni punto P una tangente t; supporremo inoltre che il punto d'intersezione della tangente t con una tangente consecutiva t' abbia per limite il punto di contatto P.

Il luogo dei punti M piedi delle perpendicolari OM abbassate da un punto fisso O sulle tangenti alla curva C dicesi *podaria* della C; O è il polo della podaria.

Teorema. — La normale alla podaria nel punto M passa pel punto di mezzo della retta OP.

Invero, se t e t' sono due tangenti alla curva C, ed M ed M' i piedi dalle perpendicolari abbassate da O su esse, detto T il punto d'intersezione delle tangenti t e t', gli angoli OMT ed OM'T sono retti, e quindi i punti M ed M' trovansi sulla circonferenza di diametro OT, e la perpendicolare nel punto



medio di MM′ passa pel centro del cerchio, cioè pel punto medio di OT. Si passi al limite, facendo tendere t' a t. Il punto T d'intersezione delle tangenti ha per limite il punto P di contatto della t colla curva; il punto medio di OT ha per limite il punto medio di OP, e la perpendicolare nel punto di mezzo di MM′, la quale passa pel punto medio di OT, ha per limite la retta che va da M al punto medio di OP. Ma il limite della perpendicolare nel punto di mezzo di MM′ è la normale alla curva descritta da M; dunque la normale alla podaria in M passa pel punto di mezzo di OP.

8. La podaria d'un cerchio di centro C, di raggio r, e di polo O è una lumaca di Pascal, ossia la concoide del cerchio di diametro OC, di polo O, e in cui il segmento costante è r (N. 19).

9. Se un angolo BAC di grandezza costante si muove in guisa che i suoi lati AB ed AC tocchino due curve fisse in due punti (variabili) B e C, la normale alla linea descritta da A passa pel centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Si suppone naturalmente la possibilità, e la continuità di questo movimento. Si suppone inoltre che per le due curve date il punto d'intersezione di due tangenti consecutive abbia per limite il punto di contatto.

Per dimostrare il teorema, sia B′ A′ C′ una nuova posizione della terna di punti BAC, e siano B_1 e C_1 i punti d'intersezione di AB con A′B′, e di AC con A′C′. Poichè gli angoli B_1AC_1 e $B_1A'C_1$ sono eguali, i punti $AA'B_1C_1$ stanno su d'una circonferenza, e quindi la normale nel punto medio di AA′ passa pel centro di questa circonferenza. Si passi al limite. I punti B_1 e C_1 hanno per limiti B e C, il centro del cerchio passante per AB_1C_1A', ossia il punto d'intersezione delle perpendicolari nei punti medii di AB_1 e AC_1 ha per limite il punto d'intersezione delle perpendicolari nei punti medii di AB e AC, ossia ha per limite il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC; e il limite della perpendicolare nel punto medio di AA′, che passava pel centro del primo cerchio, ossia la normale alla curva descritta da A, passerà pel centro del cerchio ABC.

Discutere il caso in cui l'angolo in A è retto.

10. Se O è il centro d'inversione, e P, Q, e P′, Q′ sono due coppie di punti corrispondenti nell'inversione, i triangoli OPQ e OQ′P′ sono simili, ed in senso opposto.

Dimostrare che l'inversa d'una retta passante per O è la retta stessa.

La linea inversa d'una retta non passante per O è un cerchio che passa per O; e l'inversa d'un cerchio che passa per O è una retta, che non passa per questo punto.

L'inversa d'un cerchio non passante per O è un cerchio che gode della stessa proprietà.

11. La linea inversa della spirale d'Archimede, il centro d'inversione essendo l'origine della spirale, è la spirale iperbolica.

L'inversa della spirale logaritmica, con centro d'inversione nel polo, è una spirale logaritmica eguale alla prima.

L'inversa della lumaca di Pascal, il centro d'inversione essendo il polo, è una conica, ed il centro di inversione ne è un fuoco. Nel caso speciale della cardioide, l'inversa è una parabola.

L'inversa d'una conica, il centro di inversione essendo un punto qualunque O del piano, è la podaria d'una seconda conica, il polo essendo lo stesso punto O. La podaria dell'iperbole equilatera, come pure la sua inversa, il centro d'inversione essendo il centro della curva, è la lemniscata.

12. La curva di equazione $y = f(x)$, e la curva di equazione $Y = \sqrt{A \pm y^2}$, qualunque sia la costante A, hanno, nei punti corrispondenti ad una stessa ascissa, le sottonormali eguali in valor assoluto; queste hanno lo stesso senso, se sotto il radicale c'è il segno $+$, e senso contrario, se il segno $-$. Se si fa $y = \frac{b}{a}x$, e quindi la prima linea data è una retta passante per l'origine, si ricava

$$Y^2 \mp \frac{b^2}{a^2} x^2 = A,$$

come equazione della seconda linea. Quindi la curva ottenuta è una conica avente per centro l'origine, ed è un'iperbole od una ellisse, secondochè si prende sotto il radicale il segno $+$ o $-$.

13. Le curve $y = f(x)$, e $Y = \frac{A}{f(x)}$ hanno, nei punti di identica ascissa, le sottotangenti eguali e di segno contrario.

CAPITOLO III.

Curve nello spazio e superficie.

---

§ 1. Tangente e piano osculatore.

1. Già si è definita la tangente ad una curva, anche quando questa non è contenuta in un piano, e si è visto che se il punto P, che descrive la curva, ha derivata prima non nulla, la tangente alla curva è la retta avente la direzione della derivata prima; e se alcune delle derivate successive di P sono nulle, la tangente è la retta avente la direzione della prima fra le derivate non nulle.

Ma per le curve sghembe si presentano ancora altri elementi.

Dicesi *piano osculatore* ad una linea in un suo punto P_0 il limite del piano che contiene la tangente alla curva in P_0, e che passa per un altro punto P della linea ove il punto P tenda a P_0.

Si è pure detto che retta normale ad una curva in un punto è ogni retta passante per esso, e normale alla tangente. Queste rette formano un piano, detto *piano normale*.

Si è pure dimostrato che il piano normale alla curva nel punto P_0 si può considerare come il limite del piano luogo dei punti equidistanti da P_0 e da un altro punto P della curva, ove questo abbia per limite P_0.

Fra le normali meritano menzione speciale quella contenuta nel piano osculatore, e che dicesi *normale principale;* e quella che è normale al piano osculatore, e che dicesi *binormale.*

2. Il piano osculatore d'una curva è determinato, ove si conoscano le derivate del punto P, come mostrano le proposizioni che seguono.

Teorema I. — Se il punto P ha per $t = t_0$ derivate prima e seconda $\mathbf{u} \equiv P_0U$ e $\mathbf{v} \equiv P_0V$, nè nulle nè coincidenti in direzione, il piano P_0UV è il piano osculatore alla curva.

Invero si ha dalla formula di Taylor

$$\overline{P_0P} \equiv h\mathbf{u} + \frac{h^2}{2}(\mathbf{v} + \bar{\epsilon}),$$

ove $\bar{\epsilon}$ è un segmento che col tendere di h a zero ha per limite zero. Questa equipollenza dice che i segmenti $\overline{P_0P}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} + \bar{\epsilon}$ sono contenuti in uno stesso piano, ove per origine di questi si prenda sempre il punto P_0; e quindi il piano che contiene la derivata $\mathbf{u}$, ossia la tangente, e il punto P contiene pure il segmento $\mathbf{v} + \bar{\epsilon}$. Facciasi tendere h a zero. Il segmento $\mathbf{v} + \bar{\epsilon}$ ha per limite $\mathbf{v}$, ed il suo estremo il punto V estremo di $\mathbf{v}$; quindi il piano che passa per la tangente e per P ha per limite il piano P_0UV, c. v. d.

Teorema II. — Se il punto P ha per $t = t_0$ derivate prima e seconda continue, nè nulle nè coincidenti in direzione, il piano osculatore è anche il limite del piano che passa per tre punti della curva, ove questi si avvicinino indefinitamente a P_0.

Infatti, dati a t tre valori $t_1\, t_2\, t_3$, e detti $P_1\, P_2\, P_3$ i punti corrispondenti della linea, facciasi

$$P_1Q \equiv \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1}, \quad P_1R \equiv \frac{P_1P_3}{t_3 - t_1}, \quad \text{e } P_1S \equiv 2\,\frac{QR}{t_3 - t_2}.$$

I punti Q ed S trovansi nel piano $P_1\, P_2\, P_3$.

Presa una origine fissa O e posto $OP \equiv \mathbf{a}(t)$, si avrà:

$$P_1Q \equiv \mathbf{a}(t_1\, t_2),\ P_1R \equiv \mathbf{a}(t_1\, t_3),\ \text{e } P_1S \equiv 2\mathbf{a}(t_1\, t_2\, t_3).$$

Facciansi ora tendere $t_1\, t_2\, t_3$ a t_0. Il punto P_1 ha per limite P_0; inoltre poichè $\lim \mathbf{a}(t_1\, t_2) \equiv \mathbf{a}'(t)$, e $\lim \mathbf{a}(t_1\, t_2\, t_3) \equiv \frac{1}{2}\, \mathbf{a}''(t)$, si deduce

$\lim P_1Q \equiv P_0U$, $\lim P_1S \equiv P_0V$, e quindi il piano $P_1 P_2 P_3$ che passa pei punti P_1QS aventi per limiti P_0 U e V ha per limite il piano P_0UV, c. v. d.

Ovvero:

Sia ω un'area contenuta nel piano $P_1P_2P_3$ (p. e. l'area del triangolo $P_1P_2P_3$), e si consideri il volume

$$V(t) = P_1P.\omega ,$$

ove P è un punto della curva. Questo volume è funzione di t, ed ha derivate prima e seconda

$$V'(t) = u.\omega , \qquad e \quad V''(t) = v.\omega.$$

Ora il volume $V(t)$ si annulla pei valori t_1 t_2 t_3 di t, perchè per questi valori di t il punto P coincide rispettivamente con $P_1P_2P_3$, e giace nel piano ω. Quindi, se $t_1 < t_2 < t_3$, pel teorema di Rolle, la derivata di $V(t)$ si annullerà per un valore di t medio fra t_1 e t_2, e per un secondo valore medio fra t_2 e t_3; ma se $V'(t) = u.\omega$ è nullo, sarà u parallelo al piano ω; perciò il piano $P_1P_2P_3$ è parallelo alle derivate di due punti dell'arco $P_1P_2P_3$, e quindi anche alle tangenti alla curva in questi punti. Inoltre, poichè $V'(t)$ si annulla per due valori di t, la sua derivata $V''(t)$ si annullerà per un valore intermedio, ossia il piano ω è parallelo alla derivata seconda d'un punto dell'arco considerato.

Si passi al limite. I punti $P_1P_2P_3$, e tutti i punti di quest'arco hanno per limite il punto P_0; le derivate prime e seconde di questi punti hanno per limiti le derivate prima e seconda di P_0; e il piano $P_1P_2P_3$, parallelo a due derivate prime, e ad una derivata seconda ha per limite il piano passante per P_0, e che contiene le direzioni delle due derivate prima e seconda.

Si vede da questa dimostrazione che, sotto le condizioni enunciate, il piano osculatore è ancora il limite del piano passante per P_0, e parallelo alle tangenti alla curva in due punti che si avvicinano a P_0.

TEOREMA III. — Se delle derivate successive del punto

P per $t = t_0$, alcune sono nulle, e la prima non nulla è quella d'ordine p, $\mathbf{u}_p$; e se alcune derivate susseguenti all'ordine p sono nulle, ovvero la loro direzione coincide colla direzione di $\mathbf{u}_p$, e la prima di queste, nè nulla, nè coincidente in direzione con $\mathbf{u}_p$ è la $\mathbf{u}_q$, il piano osculatore alla curva in P_0 è il piano che contiene le direzioni delle derivate d'ordine p e d'ordine q.

Infatti, se le derivate d'ordine 1, 2, ... $p-1$ sono nulle, e se le derivate d'ordine $p+1$, ... $q-1$, sono o nulle o parallele ad $\mathbf{u}_p$, mentrechè tale non è la $\mathbf{u}_q$, dalla formula di Taylor si ha

$$\overline{P_0P} \equiv \frac{h^p}{p!}\mathbf{u}_p + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\mathbf{u}_{p+1} + \dots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\mathbf{u}_{q-1} + \frac{h^q}{q!}(\mathbf{u}_q + \bar{\epsilon})$$

ove $\bar{\epsilon}$ è un segmento che ha per limite zero. Osservando che, per le ipotesi fatte, $\mathbf{u}_{p+1}, \dots \mathbf{u}_{q-1}$ sono eguali ad $\mathbf{u}_p$ moltiplicati per numeri, si deduce

$$\overline{P_0P} \equiv m\mathbf{u}_p + n(\mathbf{u}_q + \bar{\epsilon})$$

ove m ed n sono numeri. Quindi il segmento $\mathbf{u}_q + \bar{\epsilon}$ è contenuto nel piano che passa per P_0, per la tangente P_0U_p alla curva, e pel punto P. Sia $\overline{P_0Q} \equiv \mathbf{u}_q + \epsilon$, e $\overline{P_0U_q} \equiv \mathbf{u}_q$. Sarà $\lim \overline{P_0Q} \equiv \overline{P_0U_q}$ ed il punto Q ha per limite U_q, e il piano P_0U_pP ossia P_0U_pQ ha per limite il piano $P_0U_pU_q$, c. v. d.

Si osservi però che, se alcune delle derivate successive del punto P sono nulle, non è più vero in generale che il piano osculatore sia ancora il limite del piano passante per tre punti della curva.

3. Sia lo spazio diviso in due parti da una superficie. Diremo che la linea AB *tocca* la superficie nel loro punto comune P se un arco AB della linea, contenente nel suo interno il punto P, giace tutto da una stessa parte della linea.

Diremo invece che la linea AB *taglia* la superficie in P, se due archi PA e PB aventi l'estremo comune P giacciono l'uno da una parte e l'altro dall'altra della superficie.

In modo analogo a quanto si è fatto per le curve piane, si può

studiare il modo di comportarsi d'una curva rispetto ai piani che passano per un suo punto.

Teorema. Se il punto P è funzione di t avente derivata prima **u** non nulla per $t = t_0$, la linea luogo dei punti P taglia tutti i piani passanti per P_0, e non per la tangente. Se inoltre P ha derivata seconda **v** non nulla, nè coincidente colla derivata prima, la linea tocca tutti i piani passanti per la tangente, e distinti dal piano osculatore. Se infine P ha derivata terza **w** non nulla, nè giacente nel piano osculatore, la linea taglia il piano osculatore.

Invero, sia P_0AB un piano passante per P_0. Si consideri il volume $V(t) = P_0P.P_0A.P_0B$, il quale è funzione di t, che si annulla per $t = t_0$. La sua derivata prima è $V'(t) = \mathbf{u}.P_0A.P_0B$; e se il piano P_0AB non contiene la tangente, sarà $V'(t)$ diverso da zero; e quindi $V(t)$ crescente o decrescente; e, siccome si annulla per $t = t_0$, esso passa dal negativo al positivo, o viceversa, ossia il punto P passa da una parte all'altra del piano.

Se invece il piano contiene **u**, sarà $V'(t) = \mathbf{u}.P_0A.P_0B = 0$, e $V''(t) = \mathbf{v}.P_0A.P_0B$; e se il piano non contiene **v**, ossia è diverso dal piano osculatore, sarà $V''(t)$ diverso da zero; quindi $V(t)$ avrà il segno di $V''(t)$, ed il segmento P_0P è rivolto verso la stessa regione dello spazio verso cui è rivolto **v**.

Se infine il piano coincide col piano osculatore, sarà $V''(t) = 0$, e $V'''(t) = \mathbf{w}.P_0A.P_0B$; quindi, se la derivata terza di P, cioè **w**, non giace nel piano osculatore, sarà $V'''(t)$ diverso da zero; quindi $V(t)$ assumerà, nelle vicinanze di $t = t_0$, valori di segno contrario, e il punto P passa da una parte all'altra del piano.

Teorema. Se delle successive derivate $\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2$ .... del punto P per $t = t_0$ la prima non nulla è $\mathbf{u}_p$, e delle susseguenti la prima nè nulla nè coincidente in direzione con $\mathbf{u}_p$ è $\mathbf{u}_q$, e delle susseguenti la prima nè nulla nè giacente nel piano $\mathbf{u}_p\mathbf{u}_q$ è $\mathbf{u}_r$, allora:

Ogni piano passante per P_0 e non contenente la tan-

gente è secato dalla linea se p è dispari, è toccato se p è pari.

Ogni piano passante per la tangente, e diverso dal piano osculatore, è secato dalla linea se q è dispari, è toccato se q è pari.

Il piano osculatore infine è secato dalla linea se r è dispari, è toccato se r è pari.

Invero, sia P_0AB un piano passante per P_0. Si consideri il volume

$$V(t) = P_0P.P_0A.P_0B\,;$$

la derivata n^a di $V(t)$ è

$$V^{(n)}(t) = \mathbf{u}_n.P_0A.P_0B.$$

Per $t = t_0$ si annullano, per le ipotesi fatte, $V(t)$ e le successive derivate 1^a, ..., $p - 1^a$, e la derivata d'ordine p è $V^{(p)}(t) = \mathbf{u}_p.\, P_0A.\, P_0B$, la quale non è nulla se il piano P_0AB non contiene la tangente, cioè il segmento $\mathbf{u}_p$; e quindi $V(t)$ per $t = t_0$ cambia di segno se p è impari, ed in questo caso il punto P passa da una parte all'altra del piano, e la linea seca il piano. Se invece p è pari, $V(t)$ conserva un segno costante nelle vicinanze di $t = t_0$, e il punto P si trova nelle vicinanze di P_0 sempre da una stessa parte del piano; ossia la linea tocca il piano.

Se il piano P_0AB contiene la tangente, sarà $V^{(p)}(t) = \mathbf{u}_p.P_0A.\, P_0B = 0$, e saranno pure nulle alcune successive derivate, fino a quella d'ordine q, che sarà $V^{(q)}(t) = \mathbf{u}_q.P_0A.P_0B$, e questa non sarà nulla se il piano P_0AB non contiene $\mathbf{u}_q$, ossia è distinto dal piano osculatore. Se ora q è dispari, $V(t)$ per $t = t_0$ cambia segno, e la curva seca il piano P_0AB; se invece q è pari, $V(t)$ conserva nelle vicinanze di $t = t_0$ un segno costante, e la linea tocca il piano.

Se infine il piano P_0AB coincide col piano osculatore, saranno nulle le successive derivate di $V(t)$ fino a quella d'ordine r, $V^{(r)}(t) = \mathbf{u}_r.P_0A.P_0B$, la quale non è più nulla, perchè $\mathbf{u}_r$ non è nullo, nè giace nel piano osculatore. Quindi, se r è dispari, la curva seca il piano osculatore, e se r è pari, la curva lo tocca.

4. Un punto d'una curva dicesi *ordinario*, se la curva taglia tutti i piani passanti per esso e non contenenti la tangente, tocca tutti i piani passanti per la tangente, e distinti dal piano osculatore, e taglia il piano osculatore. Questo avviene se il punto P ha derivate prima, seconda e terza non nulle, nè giacenti in uno stesso piano; avviene pure se, conservando le notazioni dell'ultimo teorema, si ha p dispari, q pari e r dispari. Ogni punto non ordinario è detto *singolare*. Così se in un punto la curva tocca ogni piano non passante per la tangente (il che avviene quando p è pari), questo punto è detto *punto stazionario* o di *regresso*; se la curva taglia ogni piano passante per la tangente, e distinto dal piano osculatore (il che avviene se q è dispari), a questa tangente si dà il nome di *tangente stazionaria* o di *flesso*; e se la curva tocca il piano osculatore (il che avviene quando r è pari), questo vien detto *piano osculatore stazionario*. In uno stesso punto possono presentarsi anche due, o tutte e tre le singolarità accennate; e combinando insieme tutti i casi di parità o non dei tre numeri p, q, r, si hanno otto casi, uno dei quali corrisponde al punto ordinario, e gli altri sette a punti singolari variamente conformati. Oltre a queste singolarità della curva proveniente da elementi (punti, tangenti, piani osculatori) stazionarii, la curva ne può presentare altre, ove il punto che la descrive passi più volte per una stessa posizione, ovvero manchi di derivata.

Il volume formato colle tre prime derivate del punto P, cioè $\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}$ ha un'importanza nello studio della curva; se esso non è nullo, le tre derivate del punto P non stanno in un piano, e P è un punto ordinario della curva che esso descrive. Anche questo volume si può considerare come un limite.

Se P ha derivate 1ª, 2ª, 3ª, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ continue, se $P_1 P_2 P_3 P_4$ sono quattro punti della curva corrispondenti ai valori t_1 t_2 t_3 t_4 di t, si ha:

$$\lim \frac{\text{vol}\, P_1P_2P_3P_4}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_4-t_2)(t_4-t_3)} = \frac{1}{72}\, \mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}.$$

Infatti, si ha

(1) $$P_1P_2P_3P_4 = \frac{1}{6} P_1P_2 . P_1P_3 . P_1P_4 .$$

Presa un'origine fissa O, e fatto $OP \equiv \mathbf{a}(t)$, sarà

$$OP_1 \equiv \mathbf{a}(t_1), \quad OP_2 \equiv \mathbf{a}(t_2), \quad OP_3 \equiv \mathbf{a}(t_3), \quad OP_4 \equiv \mathbf{a}(t_4),$$

e quindi

$$P_1P_2P_3P_4 = \frac{1}{6} [\mathbf{a}(t_2) - \mathbf{a}(t_1)] . [\mathbf{a}(t_3) - \mathbf{a}(t_1)] . [\mathbf{a}(t_4) - \mathbf{a}(t_1)] .$$

Ora, ricorrendo alle funzioni interpolari, si hanno le formule

$$\mathbf{a}(t_2) \equiv \mathbf{a}(t_1) + (t_2 - t_1)\, \mathbf{a}(t_1 t_2)$$
$$\mathbf{a}(t_3) \equiv \mathbf{a}(t_1) + (t_3 - t_1)\, \mathbf{a}(t_1 t_2) + (t_3 - t_1)(t_3 - t_2)\, \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3) ,$$
$$\mathbf{a}(t_4) \equiv \mathbf{a}(t_1) + (t_4 - t_1)\, \mathbf{a}(t_1 t_2) + (t_4 - t_1)(t_4 - t_2)\, \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3) +$$
$$+ (t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)\, \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3 t_4) ;$$

quindi sostituendo

$$P_1P_2P_3P_4 = \frac{1}{6} (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)$$
$$\times \mathbf{a}(t_1 t_2) . \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3) . \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3 t_4).$$

Passando ora al limite, dopo aver diviso pel prodotto delle differenze delle t, ed osservando che

$$\lim \mathbf{a}(t_1 t_2) \equiv \mathbf{a}'(t) \equiv \mathbf{u} , \quad \lim \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3) \equiv \frac{1}{2}\, \mathbf{a}''(t) \equiv \frac{1}{2}\, \mathbf{v} ,$$
$$\lim \mathbf{a}(t_1 t_2 t_3 t_4) \equiv \frac{1}{6}\, \mathbf{a}'''(t) \equiv \frac{1}{6}\, \mathbf{w} ,$$

si ha la formula che volevasi dimostrare.

Si deduce da questo teorema che se $\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}$ non è nullo, dovrà anche essere il volume $P_1P_2P_3P_4$, per posizioni sufficientemente prossime di questi punti, diverso da zero, ossia nelle vicinanze del punto considerato si può determinare un arco della curva in modo che ogni piano non l'incontri in più di tre punti.

§ 2. Formule.

5. Siano le coordinate $x\ y\ z$ d'un punto P nello spazio funzioni d'una variabile t. Sarà la posizione del punto P funzione di questa variabile; e detti **i**, **j**, **k** i tre segmenti di riferimento, si avrà

$$\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,,$$

onde derivando,

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\,.$$

Quindi, se **u** non è nullo, ossia se $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ non sono nulle ad un tempo, la retta parallela ad **u** è la tangente alla curva.

Se M è un punto di questa tangente, e XYZ sono le sue coordinate, le coordinate del segmento PM sono $X - x$, $Y - y$, $Z - z$; e se questo segmento è parallelo al segmento **u**, le loro coordinate sono proporzionali, ossia le equazioni:

$$\text{(1)} \qquad \frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}$$

sono soddisfatte dalle coordinate di tutti e soli i punti M della tangente; e perciò queste sono le equazioni della tangente.

Il piano normale alla curva è il piano passante per P e normale al segmento **u**; quindi l'equazione

$$\mathrm{PM} \times \mathbf{u} = 0,$$

che è soddisfatta da tutti i punti M del piano normale e solamente da essi, è l'equazione del piano normale, colla notazione dei segmenti.

Se XYZ sono le coordinate di M, e gli assi di riferimento sono ortogonali, l'equazione precedente diventa

$$(2) \qquad (X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} + (Z - z)\frac{dz}{dt} = 0,$$

la quale è l'equazione del piano normale in coordinate cartesiane ortogonali.

La derivata seconda del punto P è

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k};$$

se essa non è nulla, ossia se $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ non sono ad un tempo nulle, e se la sua direzione non coincide con quella di $\mathbf{u}$, ossia non si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{dy}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} : \frac{dz}{dt},$$

il piano passante per P, e che contiene le direzioni di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$ è il piano osculatore. Se M è un punto di esso, la sua equazione, colla notazione dei segmenti, è

$$PM.\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0,$$

ossia, dette X, Y, Z le coordinate di M e sviluppando:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Il piano normale e il piano osculatore si incontrano secondo la normale principale. Quindi le equazioni (2) e (3) sono le equazioni della normale principale.

La binormale è la perpendicolare in P al piano osculatore; quindi, se M è un punto di essa, ed X, Y, Z sono le sue coordinate, sarà PM perpendicolare ai segmenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e perciò le equazioni della binormale, colla notazione dei segmenti, sono:

$$PM \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad PM \times \mathbf{v} = 0;$$

introducendo le coordinate, esse diventano

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} + (Z - z)\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$(X - x)\frac{d^2x}{dt^2} + (Y - y)\frac{d^2y}{dt^2} + (Z - z)\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Queste due equazioni si possono pure scrivere

$$\frac{X - x}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{Y - y}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{Z - z}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

La derivata terza **w** del punto P è

$$\mathbf{w} \equiv \frac{d^3x}{dt^3}\mathbf{i} + \frac{d^3y}{dt^3}\mathbf{j} + \frac{d^3z}{dt^3}\mathbf{k},$$

e se essa non è contenuta nel piano **u v**, ossia se **u.v.w** non è nullo, la curva taglia il piano osculatore, e P è un punto ordinario. Introducendo le coordinate, si ha

$$\mathbf{u.v.w} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3} & \frac{d^3y}{dt^3} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} \mathbf{i.j.k}.$$

Sono troppo facili a scriversi le equazioni della tangente, del piano osculatore, e delle altre rette e piani con essi collegati, e a discutersi le singolarità della curva ove sia nulla **u**, ovvero **v** sia o nulla, o coincidente con **u**, ovvero **w** o nulla, o contenuta nel piano **uv**.

6. La variabile indipendente t potrebbe coincidere con una delle coordinate, p. e. colla x. In questo caso saranno y e z funzioni di x

$$y = f(x), \qquad z = \varphi(x);$$

e le formule precedenti sono applicabili a questo caso, ove si sostituisca invece di $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ rispettivamente 1, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$,

$\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$. Le equazioni (1) della tangente diventano, fatti sparire i denominatori:

$$(1') \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad \text{e} \quad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

e l'equazione del piano osculatore

$$(3') \quad (X - x)\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right) = (Y - y)\frac{d^2z}{dx^2} - (Z - z)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Le y e z possono essere date quali funzioni implicite di x, cioè legate ad essa da due equazioni

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \text{e} \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$

ed in questo caso servono pure le formule precedenti, ove in esse si sostituiscano alle derivate di y e z i loro valori ricavati colle regole note.

I valori delle derivate prime sono dati dalle equazioni

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

e se fra queste equazioni e le (1') si eliminano $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, si avranno le equazioni della tangente, espresse mediante quantità note.

Il metodo più comodo di eseguire questa eliminazione è di ricavare le derivate dalle (1'), e sostituirle nelle nuove equazioni. Moltiplicando per $X - x$, esse diventano

$$\frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dx}(Z - z) = 0,$$

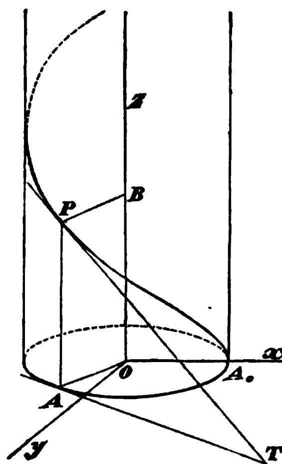
$$\text{e} \qquad \frac{d\Phi}{dx}(X - x) + \frac{d\Phi}{dy}(Y - y) + \frac{d\Phi}{dz}(Z - z) = 0.$$

Si osservi che ciascheduna di queste equazioni dipende solamente da una sola delle due equazioni date $F = 0$, e $\Phi = 0$. Derivando una seconda volta le equazioni date, si ottengono nuove equazioni che determinano le derivate seconde di y e z, e che sostituite nella

(3′) determinano il piano osculatore; ma il risultato così ottenuto ha poca importanza, a causa della sua complicazione.

7. Elica. — Un esempio basterà ad illustrare le cose dette.

Sia OA un segmento, il quale parte da una origine O fissa, è contenuto in un piano fisso xOy, ha una lunghezza costante r, e fa con un asse Ox, fissato in questo piano, un angolo variabile α. Sia OB un altro segmento avente la direzione della normale Oz al piano yOx, e la cui lunghezza è proporzionale all'angolo α. Sia infine OP la loro somma geometrica



$$(a) \qquad \mathrm{OP} \equiv \mathrm{OA} + \mathrm{OB};$$

(il punto P si ottiene o conducendo da A il segmento $\mathrm{AP} \equiv \mathrm{OB}$, ovvero da B il segmento $\mathrm{BP} \equiv \mathrm{OA}$). Variando α, il punto P descrive una curva, detta *elica*. La retta mobile indefinita AP genera un cilindro circolare retto, avente per base il cerchio descritto da A, e sopra questo cilindro giace l'elica. La retta indefinita BP si muove pure, appoggiandosi sempre all'asse Oz e mantenendosi parallela al piano xOy; essa genera una superficie detta *elicoide retto*, e anche questa superficie contiene l'elica.

Se si fa $\alpha = 0$, il segmento OA viene in $\mathrm{OA_0}$ sull'asse delle x, e OB si annulla; quindi $\mathrm{A_0}$ è un punto dell'elica.

Se si fa $\alpha = 2\pi$, il segmento OA coincide di nuovo con $\mathrm{OA_0}$, mentre il segmento OB assume un certo valore, cui si dà il nome di *passo dell'elica*. Noi indicheremo con $\mathbf{h}$ questo passo e con h il numero che lo misura. Attribuendo ad α un valore arbitrario, a causa della proporzionalità del segmento OB all'angolo corrispondente α, si deduce $\frac{\mathrm{OB}}{\alpha} \equiv \frac{\mathbf{h}}{2\pi}$, ossia

$$\mathrm{OB} \equiv \frac{\alpha}{2\pi}\,\mathbf{h}.$$

Si derivi l'equipollenza (a); detta **u** la derivata di P, e OA' e OB' le derivate dei segmenti OA e OB, si avrà

$$(b) \qquad \mathbf{u} \equiv OA' + OB'.$$

Ora OA' è un segmento contenuto nel piano xy, eguale in lunghezza ad OA, e tale che l'angolo $AOA' = \frac{\pi}{2}$; e OB' vale $\frac{1}{2\pi}\mathbf{h}$; quindi, se si fa $A'U \equiv OB' \equiv \frac{1}{2\pi}\mathbf{h}$, sarà OU la derivata del segmento OP, ossia del punto P, e la sua direzione la direzione della tangente all'elica in P. Poichè OU è perpendicolare ad OA, sarà la tangente alla curva in P perpendicolare a BP. Inoltre, detto θ l'angolo che la derivata OU fa col piano xy, ossia l'angolo che la tangente alla curva fa collo stesso piano, si ricava dal triangolo rettangolo OA'U:

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{A'U'}{OA'} = \frac{\frac{1}{2\pi}h}{r} = \frac{h}{2\pi r};$$

quindi la tangente all'elica fa un angolo costante col piano xy, vale a dire essa taglia sotto l'angolo costante le generatrici del cilindro su cui è tracciata.

Se la tangente alla curva in P incontra il piano xy nel punto T, sarà AT tangente al cerchio base in A, e dal triangolo rettangolo TAP si ricava $AT = \frac{AP}{tang\,\theta} = \alpha r$, ossia AT è eguale all'arco di cerchio AA_0.

Si derivi una seconda volta l'equipollenza $OP \equiv OA + OB$. Poichè la derivata seconda di OA è un segmento OA'' eguale in lunghezza ad OA, ma rivolto in senso opposto $OA'' \equiv -OA$, e poichè la derivata seconda di OB è nulla, detta **v** la derivata seconda di P, sarà

$$(c) \qquad \mathbf{v} \equiv -OA \equiv PB;$$

e il piano osculatore alla curva, che contiene la tangente e la direzione di **v**, è adunque il piano che passa per PB, e per la tangente alla curva. La sua traccia col piano xy passa pel punto T,

ed è parallela a PB, poichè questa retta è parallela al piano xy; dunque la traccia del piano osculatore col piano xy è la parallela condotta per T ad OA, cioè la normale ad AT.

Se si riferisce la curva agli assi cartesiani ortogonali Ox, Oy, Oz, le coordinate del segmento OA sono ($r\cos\alpha$, $r\operatorname{sen}\alpha$, 0), e le coordinate del segmento OB sono (0, 0, $\frac{\alpha}{2\pi} h$); quindi le coordinate del segmento OP, cioè del punto P, sono

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\operatorname{sen}\alpha, \quad z = \frac{\alpha}{2\pi} h.$$

Se fra la prima e la seconda equazione si elimina α, si ha l'equazione

$$x^2 + y^2 = r^2$$

del cilindro retto su cui è descritta l'elica; ovvero, interpretata nel piano xy, si ha l'equazione della proiezione dell'elica su questo piano. Eliminando α fra la seconda e terza equazione, si ha

$$y = r\operatorname{sen} \frac{2\pi}{h} z,$$

che è l'equazione d'una *sinusoide*, proiezione dell'elica sul piano yz. Se fra le tre equazioni si eliminano r ed α, si ha

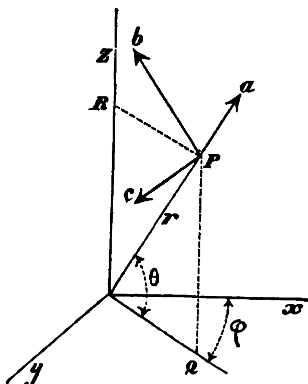
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \frac{2\pi}{h} z,$$

che è l'equazione della superficie che contiene tutte le eliche aventi lo stesso passo h, lo stesso asse Oz, e la stessa origine A_0. Questa superficie è evidentemente l'elicoide retto generato dalla retta indefinita BP.

8. Coordinate polari. — Un punto P nello spazio può essere determinato mediante coordinate polari.

Segnati tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz, dato il punto P, sono determinati il numero r che misura la distanza OP, l'angolo diedro

φ che il piano zP fa col piano zx, e l'angolo θ che OP fa col piano xy; e viceversa, dati questi numeri, è determinato il punto P. Le quantità r, φ, θ sono le coordinate polari di P, e diconsi anche rispettivamente raggio vettore, longitudine e latitudine.



La posizione del punto P è adunque funzione dei tre numeri r, θ, φ. Se si mantengono fisse θ e φ, e si varia r, il punto P si muove sulla retta OP, e la derivata parziale di P rispetto ad r è un segmento, che diremo **a**, eguale in lunghezza all'unità di misura, e diretto secondo OP. Mantenendo fissi r e φ, e variando θ, il punto P si muove su d'un cerchio contenuto nel piano fisso zP e di centro O; quindi la derivata parziale di P rispetto a θ, che coincide colla derivata di $\overline{\mathrm{OP}}$, è un segmento **b** contenuto in questo stesso piano, eguale in lunghezza ad OP, e che fa con questo un angolo retto. Infine, mantenendo fissi r e θ, e variando φ, il punto P descrive un cerchio contenuto in un piano normale ad Oz, avente il centro su questo asse, e il cui raggio è quindi la distanza PR di P da questo asse, la quale vale $r\cos\theta$; quindi la derivata parziale di P rispetto a φ è un segmento **c** tangente a questo cerchio in P, ossia normale in P al piano zP, e misurato dal numero $r\cos\theta$.

Così conosciute le derivate parziali **a**, **b**, **c** di P rispetto ad r, θ, φ, se queste coordinate sono funzioni d'un numero t, sarà anche P funzione di t, e la sua derivata è

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}\frac{dr}{dt} + \mathbf{b}\frac{d\theta}{dt} + \mathbf{c}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Poichè i segmenti **a**, **b**, **c** formano un triedro trirettangolo, **u** è la diagonale d'un parallelepipedo retto, i cui spigoli sono misurati da

$$\frac{dr}{dt},\quad r\frac{d\theta}{dt},\quad r\cos\theta\frac{d\varphi}{dt};$$

quindi, detto u il numero che misura la lunghezza di **u**, si avrà

$$u = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Se r è costante, la curva sta su d'una sfera di centro O e di raggio r; i numeri θ e φ sono le coordinate geografiche d'un punto della sfera; in questo caso nella espressione di **u** manca il primo termine a $\frac{dr}{dt}$.

9. Raccoglieremo qui alcuni risultati, già ottenuti, su limiti di segmenti, aree, volumi, distanze, ecc. collegati coi punti d'una curva, e da essi, con operazioni analitiche, dedurremo nuovi limiti che hanno una certa importanza nello studio delle curve.

Sia P un punto funzione di t; indicheremo con P_1 P_2, ... le posizioni di questo punto corrispondenti ai valori t_1 t_2 ... di t; supporremo che P abbia derivate **u**, **v**, ... continue, e che segneremo con indici, ove corrispondano a valori di t pure segnati coll'indice; riferiremo inoltre il punto ad assi cartesiani ortogonali, e diremo x y z le coordinate di P; indicheremo con accenti le loro derivate. I limiti che seguono sono ottenuti facendo tendere t_1 t_2 ... verso uno stesso valore t.

Si è visto che (Cap. I, 16, e Cap. II, 3, teor. II)

$$\text{(1)} \qquad \lim \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1} \equiv \mathbf{u} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Se indichiamo con u il numero che misura la grandezza di **u**, ossia, se poniamo

$$\text{(2)} \qquad u = gr\mathbf{u} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

la formula (1), ove si considerino i valori assoluti di ambo i membri, diventa:

$$\text{(3)} \qquad \lim \frac{gr\, P_1P_2}{t_2 - t_1} = u.$$

Si è visto che (Cap. II, 9)

$$\text{(4)} \qquad \lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)\,(t_3 - t_1)\,(t_3 - t_2)} \equiv \frac{1}{4}\,\mathbf{u}.\mathbf{v} \equiv \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \mathbf{j}.\mathbf{k} & \mathbf{k}.\mathbf{i} & \mathbf{i}.\mathbf{j} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Per maggior semplicità nei calcoli, invece di un'area della forma

$$\omega \equiv \alpha\, \mathbf{j.k} + \beta\, \mathbf{k.i} + \gamma\, \mathbf{i.j},$$

ove α β γ sono numeri, si può considerare il segmento

$$\mathbf{a} \equiv \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

poichè, data l'area è dato il segmento, e viceversa. Questo segmento, che rappresenta l'area è strettamente collegato coll'area stessa poichè la sua direzione è normale al piano dell'area ω, ed il numero che lo misura è eguale al numero che misura l'area (V. pag 28, Eserc. 5°).

Invero, se $\mathbf{b} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ è un nuovo segmento, sarà, eseguendo i calcoli,

$$\omega.\mathbf{b} = (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, \mathbf{i.j.k},$$

e

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

ossia il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è il numero che misura il volume $\omega.\mathbf{b}$, (poichè $\mathbf{i.j.k}$ è l'unità di volume). Dunque, se $\mathbf{b}$ è parallelo al piano dell'area ω, e quindi $\omega.\mathbf{b} = 0$, dovrà anche essere $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, e $\mathbf{a}$ perpendicolare a $\mathbf{b}$: pertanto il segmento $\mathbf{a}$, che è normale a tutte le rette parallele al piano ω, è normale a questo piano. Inoltre, poichè il numero che misura $\omega.\mathbf{b}$ vale il prodotto del numero che misura ω per la proiezione sulla normale ad ω, ossia sulla direzione di $\mathbf{a}$, del segmento $\mathbf{b}$, e siccome $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vale il prodotto del numero che misura $\mathbf{a}$ per la proiezione di $\mathbf{b}$ sulla direzione di $\mathbf{a}$, dall'eguaglianza di questi prodotti si deduce che il numero che misura $\mathbf{a}$ coincide col numero che misura ω.

Ciò premesso, se nel nostro caso diciamo $\mathbf{U}$ il segmento che rappresenta l'area $\mathbf{u.v}$, ossia poniamo

$$\mathbf{U} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

sarà $gr.\mathbf{U} = gr.\mathbf{uv}$. Ora la grandezza di $\mathbf{U}$ si sa calcolare coi metodi noti; dunque, detto ω il numero che misura il valor assoluto dell'area $\mathbf{u.v}$, si deduce

$$(5) \qquad \omega = gr(\mathbf{u.v}) = \sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}.$$

E se nella formula (4) non si considerano in ambi i membri che i valori assoluti, si deduce:

$$(6) \qquad \lim \frac{gr P_1 P_2 P_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} = \frac{1}{4}\, \omega.$$

La formula (4) si può scrivere

$$\lim \frac{\mathrm{P_1P_2}}{(t_2-t_1)} \cdot \frac{\mathrm{P_1P_3}}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.$$

Se qui si passa al limite facendo tendere dapprima t_1 e t_2 verso uno stesso valore t_1, tenendo conto della (1), e dopo il calcolo posto l'indice 2 invece dell'indice 3, si ha

$$\text{(7)} \qquad \lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathrm{P_1P_2}}{(t_2-t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.$$

Sia h il numero che misura la distanza di $\mathrm{P_2}$ dalla tangente in $\mathrm{P_1}$, la quale tangente ha la direzione di $\mathbf{u}_1$; sarà

$$gr(\mathbf{u}_1.\mathrm{P_1P_2}) = (gr\mathbf{u}_1) \times h.$$

Quindi se nella formula (7) si considerano le grandezze di ambo i membri e si divide per $u = gr\mathbf{u}$, si ha

$$\text{(8)} \qquad \lim \frac{h}{(t_2-t_1)^2} = \frac{w}{2u}\,.$$

Le formule (1), (4), (7) si possono applicare a segmenti, invece che a punti, ricorrendo alle relazioni $\mathrm{P_1P_2} \equiv \mathrm{OP_2} - \mathrm{OP_1}$, $\mathrm{P_1P_2P_3} \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{P_1P_2}.\mathrm{P_1P_3} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{OP_2}-\mathrm{OP_1}).(\mathrm{OP_3}-\mathrm{OP_1})$; e poi sostituendo ad OP un segmento $\mathbf{a}$. Se $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$.... sono le derivate di questo segmento, si ricava

$$\lim \frac{\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1}{t_2-t_1} \equiv \mathbf{a}', \qquad \lim \frac{(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1).(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{a}'.\mathbf{a}'',$$

$$\lim \frac{\mathbf{a}'_1.(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)}{(t_2-t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{a}'.\mathbf{a}''.$$

Se in queste formule si sostituiscono ad $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$, ... rispettivamente $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$,..., si ha

$$\lim \frac{\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1}{t_2-t_1} \equiv \mathbf{v}, \qquad \lim \frac{(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1).(\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{v}.\mathbf{w},$$

$$\lim \frac{\mathbf{v}_1.(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)}{(t_2-t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{v}.\mathbf{w};$$

e quindi

(9) $$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2}{t_2 - t_1} \equiv \mathbf{u}.\mathbf{v}\,,$$

(10) $$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2.\mathbf{u}_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}\,,$$

(11) $$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.\mathbf{u}_2}{(t_2 - t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}\,.$$

Prendansi, nella (9), i valori assoluti di ambi i membri; indicando con $\widehat{\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2}$ l'angolo acuto che fanno le direzioni di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, ossia le tangenti alla curva nei punti P_1 e P_2, si avrà

$$gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2) = (gr\mathbf{u}_1) \times (gr\mathbf{u}_2) \times \text{sen}\,\widehat{\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2}$$

quindi, dividendo per $(gr\mathbf{u})^2 = u^2$,

(12) $$\lim \frac{\text{sen}\,\widehat{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2}}{t_2 - t_1} = \lim \frac{\widehat{\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{u^2}\,.$$

Si indichi con $sen(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ il seno del triedro formato colle direzioni $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, ossia il rapporto del volume del parallelepipedo compreso fra i segmenti $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$ al parallelepipedo rettangolo, i cui spigoli sono eguali in grandezza ad $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. Si avrà

$$\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2.\mathbf{u}_3 = (gr\mathbf{u}_1) \times (gr\mathbf{u}_2) \times (gr\mathbf{u}_3) \times \text{sen}\,(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Quindi dalla (10), dividendo per $(gr\mathbf{u})^3 = u^3$, e posto

(13) $$\Delta = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

si ricava

(14) $$\lim \frac{\text{sen}\,(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)}{(t_2 - t_1).(t_3 - t_1).(t_3 - t_2)} = \frac{\Delta}{2u^3}\,.$$

Indicando con $(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1; \mathbf{u}_2)$ l'angolo formato dal piano che contiene l'area $\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1$, ossia il piano osculatore alla curva in P_1, colla direzione $\mathbf{u}_2$, ossia colla tangente alla curva in P_2, si ha

$$\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.\mathbf{u}_2 = [gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1)] \times (gr\mathbf{u}_2) \times \text{sen}(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1;\ \mathbf{u}_2)\,;$$

quindi dalla (11), dividendo per $gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = \omega$, e per $gr\mathbf{u} = u$, si ha

(15) $$\lim \frac{\text{sen}\,(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1;\ \mathbf{u}_2)}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta}{\omega \times u}\,.$$

Se nella formula (12) invece del segmento **u** si legge il segmento **U**, e quindi invece di **v** si legge **V**, derivata di **U**, e invece di $\omega = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v})$ si legge $gr(\mathbf{U}.\mathbf{V})$ si ha:

$$\lim \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2)}{t_2 - t_1} = \frac{gr(\mathbf{U}.\mathbf{V})}{\mathbf{U}^2}\,.$$

Ora, poichè il segmento **U** rappresenta l'area **u.v**, il segmento **V**, derivata di **U** rappresenta l'area **u.w** derivata di **u.v**, e quindi

$$gr(\mathbf{U}.\mathbf{V}) = (gr\mathbf{U}) \times (gr\mathbf{V}) \operatorname{sen}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) =$$

$$= (gr\mathbf{u}) \times (gr\mathbf{v}) \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uv}} \times (gr\mathbf{u})(gr\mathbf{w}) \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uw}} \operatorname{sen}(\mathbf{u}.\mathbf{v};\ \mathbf{u}.\mathbf{w})\,,$$

ove si indichi con $(\mathbf{u}.\mathbf{v};\ \mathbf{u}.\mathbf{w})$ l'angolo formato dai piani delle aree **u,v** e **u.w**, che coincide coll'angolo **U, V** formato dalle loro normali. Ora, da formule note di trigonometria si ha

$$(gr\mathbf{u})(gr\mathbf{v})(gr\mathbf{w}) \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uv}} \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uw}} \operatorname{sen}(\mathbf{uvw}) = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}) = \Delta\,,$$

quindi sostituendo

(16) $$\lim \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)}{t_2 - t_1} = \frac{u\Delta}{\omega^2}\,.$$

Si osservi che, a sinistra, l'angolo piano $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$ misura l'angolo diedro dei piani osculatori in P_1 e P_2.

Si è pure trovato (N. 4)

(17) $$\lim \frac{P_1P_2P_3P_4}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)} =$$

$$= \frac{1}{72}\, \mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w} = \frac{1}{72}\, \Delta\,.$$

Questa formula si può scrivere

$$\lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \cdot \frac{P_1P_4}{(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)} = \frac{1}{24}\,\Delta\,;$$

e se nel membro di sinistra si fanno tendere $t_1\ t_2\ t_3$ ad uno stesso valore t_1, servendoci della (4), e sostituendo l'indice 2 al 4, si ha

(18) $$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.P_1P_2}{(t_2 - t_1)^3} = \frac{1}{6}\,\Delta\,.$$

Detto k il numero che misura la distanza di P_2 dal piano dell'area $\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1$,

ossia dal piano osculatore in P_1, e osservando che

$$gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.P_1P_2) = [gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1)] \times k \,,$$

si deduce

(19) $$\lim \frac{k}{(t_2 - t_1)^3} = \frac{\Delta}{6\omega} \,.$$

La formula (17) si può pure scrivere

$$\lim \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{P_2P_3}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)} \cdot \frac{P_3P_4}{t_4 - t_3} = \frac{1}{12} \Delta \,,$$

e passando al limite, facendo tendere t_1 e t_2 ad uno stesso valore t_1, e t_3 e t_4 ad uno stesso valore t_3, e poi scambiando l'indice 3 in 2, si ha

$$\lim \frac{\mathbf{u}_1.P_1P_2.\mathbf{u}_2}{(t_2 - t_1)^4} = \frac{1}{12} \Delta \,.$$

Ora è noto dalla trigonometria che

$$gr(\mathbf{u}_1.P_1P_2.\mathbf{u}_2) = (gr\mathbf{u}_1) \times (gr\mathbf{u}_2) \times \delta \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2},$$

ove δ rappresenta la minima distanza delle rette su cui trovansi $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$, ossia la minima distanza delle tangenti alla curva in P_1 e P_2. Quindi dall'ultima formula scritta si ricava

(20) $$\lim \frac{\delta \operatorname{sen}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{(t_2 - t_1)^4} = \frac{\Delta}{12 u^2} \,;$$

e dividendo questa formula per la (12) si ha

(21) $$\lim \frac{\delta}{(t_2 - t_1)^3} = \frac{\Delta}{12\omega} \,.$$

§ 3. Piano tangente alle superficie.

10. Diremo superficie il luogo delle posizioni d'un punto variabile P, la cui posizione dipende da due numeri variabili u e v. Supporremo che attribuendo ad u e v due coppie di valori distinte,

almeno in certi intervalli, anche le posizioni corrispondenti di P siano distinte. Supporremo inoltre che P sia funzione continua di u e v, cioè se i valori di u e v corrispondenti a P hanno per limiti u_0 e v_0 corrispondenti a P_0, il punto P abbia per limite P_0, e viceversa, se P tende a P_0, u e v abbiano per limiti u_0 e v_0.

Se, dopo aver assegnato il valore di v, si fa variare u, il punto P descrive una curva giacente sulla superficie e determinata dal valore attribuito a v. Variando questo valore, si hanno infinite curve analoghe, il cui insieme forma la superficie. Si otterrebbe un altro sistema di infinite curve sulla superficie scambiando le veci delle variabili u e v.

Sia P_0 un punto fisso della superficie, e P un altro punto della stessa, che si avvicini indefinitamente a P_0. Nei casi più comuni esiste un piano passante per P_0 e tale che l'angolo acuto fatto dalla retta P_0P con questo piano ha per limite zero quando P tende a P_0. A un piano siffatto si dà il nome di *piano tangente* alla superficie; la sua giacitura dicesi anche *giacitura della superficie* nel punto P_0. La perpendicolare al piano tangente nel punto P_0 dicesi *normale* alla superficie in questo punto.

Così ad esempio, se la superficie è un piano, in ogni suo punto P_0 il piano tangente è il piano stesso; poichè la retta P_0P che unisce P_0 ad un altro punto P della superficie fa con questo piano un angolo nullo, e che quindi ha per limite zero. Se la superficie è una sfera di centro C, il piano tangente in un suo punto P_0 è il piano perpendicolare in P_0 al raggio CP_0, ossia coincide col piano tangente quale è definito dalla geometria elementare; invero l'angolo che la retta P_0P fa con questo piano è eguale alla metà dell'angolo PCP_0, ed ha per limite zero se tende a P_0.

Vedremo più tardi che, in generale, il piano tangente si può anche considerare come un limite.

11. Invece di considerare l'angolo che la retta P_0P fa col piano tangente, riesce spesso più conveniente adoperare il teorema che segue:

Teorema. — Se, per ogni retta P_0P che unisce il punto fisso P_0 col punto variabile P della superficie, si può condurre un piano che, col tendere di P a P_0, abbia per limite un piano fisso, questo piano fisso è il piano tangente alla superficie in P_0.

Viceversa, se la superficie ha un piano tangente in P_0, per ogni retta P_0P che unisce P_0 con un altro punto P della superficie si può condurre un piano che abbia per limite il piano tangente alla superficie, ove P tenda a P_0.

Infatti, sia α il piano passante per P_0P, ed avente per limite il piano fisso π. L'angolo di P_0P con π è minore dell'angolo dei piani α e π. E poichè quest'angolo ha per limite zero, anche l'angolo di P_0P con π ha per limite zero e π è il piano tangente.

Viceversa, se π è il piano tangente alla superficie in P_0, sia α il piano passante per P_0P e per la normale a P_0P contenuta in π. L'angolo dei piani α e π è uguale all'angolo che la retta P_0P fa col piano π, e poichè questo angolo ha per limite zero, anche gli angoli dei piani α e π ha per limite zero, ed il piano α ha per limite π.

È chiaro che se una superficie ha un piano tangente in P_0, e su essa sta descritta una curva avente tangente in P_0, questa tangente alla curva è contenuta nel piano tangente alla superficie. Invero, sia P un altro punto della curva, e quindi della superficie; e sia α un piano passante per P_0P ed avente per limite il piano tangente. Poichè la retta P_0P ha per limite la tangente alla curva, il piano α che contiene la P_0P ha per limite un piano che contiene la tangente alla curva. Ma il piano α ha per limite il piano tangente; dunque il piano tangente alla superficie contiene anche la tangente alla curva descritta su essa.

Viceversa, dal sapere che una superficie ha un piano tangente in P_0, e che una curva passa per questo punto e giace sulla superficie, non è lecito dedurre che questa curva abbia una tangente in P_0. Però questa conseguenza sarà lecita qualora siano imposte

alla curva altre condizioni convenienti. Il caso che più spesso si presenta è il seguente:

TEOREMA. — Se due superficie hanno comuni i punti di una linea, e in un punto P_0 di questa linea le superficie hanno piani tangenti distinti, anche la linea d'intersezione delle superficie ha in P_0 una tangente, che è l'intersezione dei piani tangenti alle superficie.

Infatti, sia P un altro punto appartenente alla linea, e quindi alle due superficie; e siano π e π' i piani tangenti alle superficie in P_0. Per la retta P_0P si può condurre un piano α avente per limite π, ed un piano α' avente per limite π'. Ora, passando al limite, la retta P_0P, intersezione dei piani α ed α', ha per limite l'intersezione dei piani π e π', cioè la tangente alla linea d'intersezione della superficie è l'intersezione dei loro piani tangenti.

Come caso speciale, la linea d'intersezione d'un piano colla superficie ha per tangente in un suo punto l'intersezione di questo piano col piano tangente alla superficie in quel punto.

12. Un criterio analitico per riconoscere l'esistenza e determinare il piano tangente ad una superficie è somministrato dalla proposizione che segue.

TEOREMA. — Se il punto P è funzione delle variabili u e v, avente derivate parziali di primo ordine continue, non nulle e non coincidenti in direzione, il piano tangente in un punto della superficie descritta da P è il piano passante per questo punto e contenente le direzioni delle due derivate parziali.

Infatti, siano $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ le derivate parziali del punto P; data alle variabili la nuova coppia di valori $u+h$, $v+k$, detto P′ il punto corrispondente della superficie, si ha

$$\overline{PP'} \equiv (\mathbf{p}+\overline{\alpha})h+(\mathbf{q}+\overline{\beta})k,$$

ove $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ sono segmenti che hanno per limite zero col tendere

di h e k a zero. Facciasi $PA \equiv p$, $PB \equiv q$, $PC \equiv p + \bar{\alpha}$, $PD \equiv q + \bar{\beta}$. Il segmento PP' è una combinazione lineare di PC e PD, quindi la retta PP' è contenuta nel piano PCD. Si passi al limite. I punti C e D hanno per limiti A e B, quindi il piano PP'CD ha per limite il piano PAB.

Perciò ogni retta PP' è contenuta in un piano avente per limite il piano fisso PAB, dunque questo è il piano tangente alla superficie nel punto P.

13. Per giudicare del modo di comportarsi della superficie rispetto al piano tangente, dicansi ancora **p** e **q** le derivate di primo ordine del punto P, e **r**, **s**, **t** le sue derivate del secondo ordine, che supporremo anche continue. Si ha dalla formula di Taylor

$$PP' \equiv ph + qk + \frac{1}{2}\left[(r + \alpha)h^2 + 2(s + \beta)hk + (t + \gamma)k^2\right],$$

ove α, β, γ sono segmenti aventi per limite zero. Si consideri il volume $V = p.q.PP'$ formato dall'area $p.q$ che sta nel piano tangente e dal segmento PP'. Si ricava

$$V = p.q.PP' = \frac{1}{2}[(p.q.r + p.q.\alpha)h^2 + 2(p.q.s + p.q.\beta)hk$$
$$+ (p.q.t + p.q.\gamma)k^2],$$

ovvero, posto

$$A = p.q.r, \quad B = p.q.s \quad e \quad C = p.q.t,$$

e chiamando α' β' γ' i volumi infinitesimi $p.q.\alpha$, $p.q.\beta$ e $p.q.\gamma$, si ha

$$V = \frac{1}{2}[(A + \alpha')h^2 + 2(B + \beta')hk + (C + \gamma)k^2],$$

la quale formula si può pure interpretare supponendo che A, B, C, α', β', γ', V, invece di rappresentare i volumi, rappresentino i numeri che misurano questi volumi.

Ora è noto dal calcolo (N. 133 e segg.), che se la quantità

$$\Delta = AC - B^2$$

è positiva, V conserva un segno costante per valori sufficientemente piccoli di h e k, e quindi il volume p.q.PP′ ha sempre uno stesso senso, purchè P′ sia prossimo a P; vale a dire nelle vicinanze del punto considerato la superficie giace tutta da una parte del piano tangente. Un punto per cui $\Delta > 0$ dicesi *punto ellittico.*

Se invece Δ è negativo, V assume valori di segno contrario variando h e k, e comunque si prendano questi piccoli; quindi la superficie ha i suoi punti, nelle vicinanze di P, alcuni da una parte ed altri dall'altra del piano tangente. Un punto per cui $\Delta < 0$, dicesi *punto iperbolico.*

Se infine $\Delta = 0$, il punto dicesi *parabolico,* e l'esame del modo di comportarsi della superficie rispetto al piano tangente presenta maggiori difficoltà.

14. Si riferisca il punto P, funzione dei numeri u e v, e che genera la superficie, a tre assi cartesiani ortogonali, e siano x, y, z le sue coordinate, che son pure funzioni di u e v.

Conservando le notazioni precedenti, si avrà

$$\mathbf{p} \equiv \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}, \quad \mathbf{q} \equiv \frac{dx}{dv}\mathbf{i} + \frac{dy}{dv}\mathbf{j} + \frac{dz}{dv}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} \equiv \frac{d^2x}{du^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{du^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{du^2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{s} \equiv \frac{d^2x}{dudv}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dudv}\mathbf{j} + \frac{d^2x}{dudv}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d^2x}{dv^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dv^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dv^2}\mathbf{k}.$$

Se M è un punto del piano tangente, sarà

$$\mathrm{PM}.\mathbf{p}.\mathbf{q} = 0;$$

e, dette XYZ le coordinate di M, l'equazione del piano tangente diventa

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = 0.$$

Se il punto M sta sulla normale alla superficie, sarà

$$PM \times \mathbf{p} = 0\,,\quad PM \times \mathbf{q} = 0\,;$$

queste sono le equazioni della normale colla notazione dei segmenti. Introducendo le coordinate di P, M, **p**, **q**, esse diventano

$$(X - x)\frac{dx}{du} + (Y - y)\frac{dy}{du} + (Z - z)\frac{dz}{du} = 0\,,$$

e
$$(X - x)\frac{dx}{dv} + (Y - y)\frac{dy}{dv} + (Z - z)\frac{dz}{dv} = 0\,,$$

che si possono pure scrivere

$$\frac{X - x}{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}} = \frac{Y - y}{\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}} = \frac{Z - z}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}.$$

I volumi $A = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{r}$, $B = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{s}$, $C = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{t}$ si possono pure esprimere mediante le coordinate, e si ha

$$A = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^2x}{dudv} & \frac{d^2x}{dv^2} \end{vmatrix},$$

e analogamente per B e C.

15. Le variabili u e v, da cui dipende la posizione del punto P della superficie, possono essere due delle coordinate del punto P. Se le coordinate x ed y sono le variabili indipendenti, sarà z funzione di x ed y

$$z = f(x,\ y).$$

Si avrà in questo caso, facendo $u = x$ e $v = y$,

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{i} + \frac{dz}{dx}\mathbf{k}\,,\quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{j} + \frac{dz}{dy}\mathbf{k}\,,$$

$$\mathrm{r} \equiv \frac{d^2z}{dx^2}\mathbf{k}, \quad \mathrm{s} \equiv \frac{d^2z}{dxdy}\mathbf{k}, \quad \mathrm{t} \equiv \frac{d^2z}{dy^2}\mathbf{k};$$

l'equazione del piano tangente diventa

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y);$$

i volumi indicati con A, B, C si riducono alle derivate seconde di z rispetto ad x ed y, ove i.j.k sia l'unità di volume, e

$$\Delta = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2.$$

La z potrebbe essere funzione implicita di x ed y, cioè legata ad essa mediante un'equazione

$$F(x, y, z) = 0.$$

Supposto che questa equazione determini effettivamente la z in funzione di x ed y, e supposto ancora $\frac{dF}{dz}$ non nulla, si avranno, per determinare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, le equazioni

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \text{e} \qquad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0;$$

eliminando, fra queste due equazioni e quella del piano tangente, $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, il che si ottiene aggiungendo all'equazione del piano tangente queste due moltiplicate per $X - x$ e $Y - y$, si ha

$$\frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dz}(Z - z) = 0,$$

che è l'equazione del piano tangente alla superficie, ed in questa equazione non compaiono che le derivate parziali di F rispetto alle tre variabili x, y, z.

Così p. e. se l'equazione della superficie è di secondo grado

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$
$$+ 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z_2 = 0,$$

si ricava

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dx} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dy} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dz} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34},$$

e quindi l'equazione del piano tangente è:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})(X - x) +$$
$$+ (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})(Y - y) +$$
$$+ (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})(Z - z) = 0.$$

Se a questa equazione si aggiunge la $F(x, y, z) = 0$, l'equazione del piano tangente assume la forma

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})X + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})Y +$$
$$+ (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})Z + (a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}) = 0.$$

§ 4. Esempi.

16. Coni. — Se da un punto fisso V si conducono le rette a tutti i punti d'una linea l, queste rette formano una superficie detta *cono*. Il punto V ne è il *vertice*, la linea l la *base*, o *direttrice*; ed essa può essere piana, ovvero non; ogni retta che unisce V con un punto della l dicesi *generatrice*.

Teorema. — Se At è la tangente alla linea base nel suo punto A, ed essa non coincide colla generatrice VA del cono, il piano VAt è tangente alla superficie conica in tutti i punti della generatrice VA.

Infatti, sia P un punto della generatrice VA, P′ un altro punto della superficie e VA′ la generatrice passante per esso. La retta PP′ è contenuta nel piano VAA′. Facciasi tendere P′ a P; la

retta AA′ ha per limite la A*t* tangente alla base in A, e il piano VAA′ ha per limite il piano VA*t*. Dunque la retta PP′ è contenuta in un piano che ha per limite il piano fisso VA*t*; quindi questo piano è il piano tangente alla superficie in P, cioè in ogni punto della generatrice VA.

Cilindri. — Dicesi *superficie cilindrica* o *cilindro*, la superficie luogo delle rette passanti per i punti d'una linea fissa *l*, e parallele ad una retta fissa *r*. La linea *l* dicesi ancora *base*, o *direttrice* del cilindro. Un cilindro si può considerare come un cono in cui il vertice sia all'infinito.

In modo analogo a quanto si è detto pel cono, si dimostra che:

Se A*t* è la tangente in A alla linea base d'una superficie cilindrica ed essa non coincide colla generatrice passante per A, il piano che contiene questa generatrice e la tangente A*t* è il piano tangente al cilindro in tutti i punti della generatrice passante per A.

L'intersezione d'un piano con un cono o con un cilindro è la proiezione su questo piano della linea base *l*, fatta o dal centro V, o parallelamente alla direzione *r*; quindi dalle proposizioni precedenti si deduce la stessa costruzione della tangente alla proiezione d'una curva, che fu indicata al Cap. II, N. 21.

17. Sia *l* una linea rigida che si muove nello spazio, ossia si muove in guisa che non si alterano le reciproche distanze dei suoi punti. Durante questo movimento i punti della *l* descrivono nuove linee, che diremo *m*; e le varie posizioni di *l*, come pure le linee *m* stanno su d'una superficie, che si dice *generata* dalla linea *l*.

Noi supporremo che per ogni punto della superficie passi una sola linea *l*, ed una sola linea *m*; e supporremo che se sulla superficie il punto P′ ha per limite il punto P, tutti i punti della *l* che passa per P′ abbiano per limiti i punti corrispondenti della *l* che passa per P.

Il piano tangente alla superficie in un suo punto P è

il piano che contiene le tangenti alle due linee l ed m delle superficie passanti per P, supposto che esse abbiano tangenti, e che queste non coincidano.

Infatti, sia P' un altro punto della superficie, e siano l' e m' le linee l ed m che passano per P'. Sia Q il punto che sta sulle linee (l', m), e R il punto che sta sulle (l, m'); si consideri il piano PQP'. Col tendere di P' a P, il punto Q ha per limite P, per l'ipotesi fatta, e poichè PR è in valor assoluto eguale a QP' (poichè questi segmenti sono posizioni distinte d'un segmento invariabile in lunghezza) anche R ha per limite P.

La retta PQ ha per limite la tangente alla curva m in P. Dico poi che la retta QP' ha per limite la tangente alla l in P. Invero, dette t e t' le tangenti alle l ed l' nei punti P e Q, sarà l'angolo $\widehat{QP',t} < \widehat{QP',t'} + \widehat{t',t}$; ma l'angolo $\widehat{QP',t} = \widehat{PR,t}$ perchè posizioni d'uno stesso angolo; quindi $\widehat{QP't} < \widehat{PR',t} + \widehat{t',t}$. Si faccia tendere P' a P; le rette PR e t' hanno per limiti la tangente t alla linea l in P; quindi gli angoli $\widehat{PB,t}$, e $\widehat{t',t}$ tendono a zero, e lo stesso avviene dell'angolo $\widehat{QP',t}$ ossia la retta QP' ha per limite la tangente alla l in P.

Pertanto ogni retta PP' che unisce il punto P ad un altro punto P' della superficie è contenuta in un piano PQP', che ha per limite il piano che contiene le tangenti alle linee l ed m in P; dunque questo è il piano tangente alla superficie.

18. Si dice che una figura rigida ruota attorno ad un asse, se, oltre al conservarsi inalterate le reciproche distanze dei suoi punti, rimangono pure inalterate le loro distanze da due punti fissi dell'asse. Durante questo movimento ogni punto della figura descrive un cerchio contenuto in un piano normale all'asse ed il cui centro sta su quest'asse.

La superficie generata da una linea l, che ruota attorno ad un asse, dicesi *superficie di rivoluzione*. I cerchi descritti dai punti della linea diconsi *paralleli*; ogni sezione fatta nella superficie con un piano passante per l'asse dicesi *meridiano*.

Dalle cose dette precedentemente risulta che il piano tangente alla superficie di rivoluzione in un suo punto è il piano che contiene le tangenti alla linea l ed al parallelo, che passano per questo punto. Siccome poi la tangente al parallelo in P è normale al piano del meridiano passante per P, così il piano tangente in un punto P della superficie è il piano normale al piano del meridiano, e passante per la tangente alla l; in altre parole, la normale alla superficie di rivoluzione incontra l'asse.

Fra le superficie di rivoluzione, oltre alla sfera, che si può considerare come di rivoluzione attorno ad ogni suo diametro, è a menzionarsi la superficie generata dalla rivoluzione d'un cerchio attorno ad un asse posto nel piano del cerchio ma non passante pel centro, la quale vien detta *toro*; e la superficie generata dalla rotazione d'una retta attorno ad un asse che non incontra, ne è parallelo ad essa, che è *l'iperboloide di rivoluzione.*

19. Un altro esempio di superficie cui è pure applicabile la proposizione precedente, è l'*elicoide retto*, ossia la superficie generata dalla retta BP del N. 7, la quale incontra l'asse dell'elica, si appoggia all'elica, ed è parallela al piano normale all'asse dell'elica. Ogni punto della retta BP alla distanza costante r da B, descrive un'elica sulla superficie; e le linee chiamate l ed m sono rispettivamente le varie posizioni della retta BP, che diconsi generatrici, e le varie eliche descritte dei punti della BP. Il piano tangente alla superficie nel punto P è perciò il piano contenente la generatrice BP, e la tangente all'elica passante per questo punto, la quale tangente sappiamo costrurre.

Detto θ l'angolo che il piano tangente all'elicoide in P fa col piano xy, e h il passo dell'elica, si ha

$$tang\theta = \frac{h}{2\pi r}\ ;$$

quindi, muovendosi P sulla generatrice BP, ossia variando r, varia pure θ, e quest'angolo diminuisce man mano che P si allontana dall'asse.

20. In modo analogo a quello con cui furono trattate le questioni precedenti, se ne possono trattare altre simili. In generale, se su d'una superficie sono segnati due sistemi di linee l ed m, in modo che per ogni punto P della superficie passi una sola linea l ed una sola linea m, e si conoscono le tangenti alle linee l ed m passanti per P, se la superficie ha un piano tangente in P, questo deve contenere quelle tangenti, e quindi è determinato, se esse sono distinte. Ma dal supporre l'esistenza delle tangenti alle linee l ed m non si può conchiudere l'esistenza del piano tangente alla superficie, se non si introducono alcune condizioni restrittive.

Detto P′ un altro punto della superficie, ed l' ed m' le linee l ed m che passano per esso, sia Q il punto d'intersezione delle linee m ed l', e si consideri il piano PQP′. Col tendere di P′ a P anche Q tende a P, e la retta PQ ha per limite la tangente alla linea m in P. Se ora noi possiamo accertarci che la retta QP′, col tendere di P′ e Q a P, abbia per limite la tangente alla l in P (il che non è conseguenza necessaria dell'esistenza di questa tangente) si conchiuderà che la retta PP′ è contenuta in un piano PQP′ che ha per limite il piano che contiene le tangenti in P alle linee l ed m, e quindi che esso è il piano tangente alla superficie.

21. Omografia. — Suppongasi che ad ogni punto P dello spazio (soggetto se occorre, a convenienti limitazioni) corrisponda un punto P^*, che diremo *omologo* del primo, in guisa che, se P descrive una retta r, anche P^* descriva una retta r^* che diremo omologa della prima; inoltre si supponga che se P tende a P_0, il punto P^* abbia per limite P_0^*. Si deduce allora che: se P descrive un piano π il suo omologo descrive pure un piano π^* omologo del primo; se la retta r ha per limite la r_0, la retta r^* ha per limite la r_0^*; e se il piano π ha per limite π_0, il piano π^* ha per limite π_0^*.

Una corrispondenza fra i punti P e P_0^*, nella quale siano verificate le ipotesi enunciate, dicesi *omografia;* e si potrebbe dimostrare l'identità di questa definizione dell'omografia con quelle che soglionsi dare nei corsi di geometria proiettiva.

Se il punto P descrive una curva C avente tangente t, e piano osculatore π, il punto P^* descriverà una curva C^* la cui tangente è la retta t^* omologa di t, ed il cui piano osculatore è π^* omologo di π.

Se il punto P descrive una superficie S, avente piano tangente π, il punto P^* descrive una superficie S^* il cui piano tangente è π^* omologo di π.

Infatti, se P e P' sono due posizioni del punto P che descrive la curva C e P^* e P'^* i loro omologhi, la retta $P^*P'^*$ è l'omologa di PP'; e col tendere di P' a P la PP' ha per limite la tangente t alla curva C nel punto P, e quindi la $P^*P'^*$ ha per limite la retta t^* omologa di t; dunque t^* è la tangente alla C^* in P^*. Il piano che passa per t, e per P' ha per limite il piano osculatore π alla curva C; quindi il suo omologo, cioè il piano che passa per t^* e per P^*, ha per limite il piano π^* omologo di π. Dunque π^* è il piano osculatore alla C^* in P^*.

Se P e P' sono due posizioni del punto P che descrive la superficie S, e P^* e P'^* sono i loro punti omologhi sulla S^*, si immagini il piano α, che contiene la PP', e che ha per limite il piano π tangente alla superficie in P. Il piano α^*, omologo di α, contiene la $P^*P'^*$, ed ha per limite il piano π^*; dunque ogni retta $P^*P'^*$ che unisce il punto P^* ad un altro punto P'^* della S^* è contenuta in un piano avente per limite π^*; e questo è il piano tangente alla superficie.

Esercizii.

22. 1. La proiezione dell'elica (N. 7) sul piano xy fatta parallelamente ad una retta obliqua rispetto a questo piano è una cicloide (Cap. II, eserc. 5).

La proiezione dell'elica sul piano xy fatta da un centro di proiezione che giace sull'asse è una spirale iperbolica (Cap. II, eserc. 3).

2. Siano $l_1\ l_2\ \ldots l_n$ n linee descritte sopra uno stesso cono di vertice O; una generatrice di questo cono incontri queste linee nei punti $P_1\ P_2 \ldots P_n$; si deter-

mini sulla stessa generatrice un punto P tale che

$$OP = f(OP_1, OP_2, ...OP_n).$$

Variando la generatrice, il punto P descrive sul cono una nuova linea l. La costruzione della tangente a questa linea si ottiene a questo modo. Si immagini il piano tangente al cono lungo la generatrice considerata; esso conterrà le tangenti alle linee $l_1\ l_2 ... l_n$ ed l. Le normali alle linee $l_1\ l_2 ... l_n$ contenute in questo piano incontrino la perpendicolare in O alla retta $OP_1P_2...P_nP$ in $N_1N_2...N_n$; si determini su questa perpendicolare il punto N tale che

$$ON = \frac{df}{dOP_1} ON_1 + \frac{df}{dOP_2} ON_2 + \cdots + \frac{df}{dOP_n} ON_n.$$

La NP è normale alla curva descritta da P, e la perpendicolare in P alla NP, contenuta nel piano tangente al cono è la tangente alla linea descritta da P.

3. Si porti sulla retta OP che unisce il punto fisso O al punto variabile P d'una curva un segmento PQ di lunghezza costante; conoscendo la tangente alla linea descritta da P, trovare la tangente alla linea descritta da Q (*concoide*).

4. Si determini sulla retta OP che unisce il punto fisso O al punto P d'una curva un punto Q tale che $OP \times OQ = k^2$, ove k è un numero costante (*inversione*). I piani normali alle linee descritte da P e Q, ed il piano perpendicolare nel punto medio di PQ passano per una stessa retta; le tangenti alle curve descritte da P e Q si incontrano in un punto di questo piano. Queste proposizioni si possono dedurre dall'esercizio 2°, ovvero trattare in modo analogo a quello seguìto al Cap. II, N. 22.

5. L'inversa della spirale logaritmica, il centro d'inversione essendo un punto della perpendicolare al piano della spirale nel suo polo, è una curva sferica detta *lossodromia*. Essa taglia sotto angolo costante tutti i cerchi massimi della sfera passanti pel centro d'inversione.

6. Da un punto fisso O si conduca una retta che incontri n superficie fisse nei punti $P_1\ P_2 ... P_n$. Si determini su questa retta il punto P la cui distanza da O sia una funzione analitica delle distanze analoghe dei punti $P_1\ P_2 ... P_n$:

$$OP = f(OP_1, OP_2, ...OP_n).$$

Variando la retta, il punto P descrive una superficie. Il piano perpendicolare in O alla retta incontri le normali alle superficie date nei punti $N_1\ N_2 ... N_n$. Si determini il punto N, pure contenuto in questo piano, e tale che

$$\overline{ON} = \frac{df}{dOP_1} \overline{ON_1} + \frac{df}{dOP_2} \overline{ON_2} + \cdots + \frac{df}{dOP_n} \overline{ON_n};$$

sarà NP la normale alla superficie descritta da P.

7. Si porti sulla retta OP, che unisce il punto O al punto variabile P di una superficie data, il segmento PQ di lunghezza costante. Variando P, il punto Q descrive una superficie, che si può considerare come la concoide della prima rispetto al polo O.

Il piano perpendicolare in O alla OPQ incontri la normale alla superficie descritta da P in N. Sarà NQ la normale alla superficie descritta da Q.

8. Si determini sulla retta OP, che unisce il punto O al punto variabile P d'una superficie, il punto Q tale che $OP \times OQ = k^2$, ove k è una costante data. Variando P, il punto Q descrive una seconda superficie (inversa della prima). Le normali alle superficie descritte da P e Q si incontrano in un punto del piano perpendicolare nel punto medio di PQ.

CAPITOLO IV.

Funzioni della posizione d'un punto.

---

§ 1. Derivate.

1. Un numero U è funzione della posizione d'un punto P, se ad ogni posizione di P, o assolutamente arbitraria o convenientemente limitata, corrisponde un valore del numero U. Così, ad esempio, i numeri che misurano le distanze del punto variabile P da punti o rette o piani fissi sono funzioni numeriche di U, e lo stesso avviene di ogni espressione analitica, somma, prodotto, ecc., di alcune di tali distanze.

Le coordinate cartesiane $x\ y\ z$ del punto P sono pure funzioni numeriche di P, ed ogni funzione analitica $U = f(x, y, z)$ di queste coordinate è funzione della posizione di P. Viceversa, se U è funzione della posizione di P, date le coordinate xyz di P, risulta determinato questo punto, e quindi il numero U. Perciò ogni funzione numerica della posizione d'un punto si può considerare come funzione delle sue coordinate.

2. Diremo che U ha per derivata il segmento $\mathbf{u}$, corrispondentemente ad una data posizione di P, e scriveremo $\mathbf{u} \equiv \frac{dU}{dP}$ se, attribuendo al punto una nuova posizione P′, la differenza ΔU dei due valori assunti da U si può mettere sotto la forma

$$\Delta U = \overline{PP'} \times \overline{(\mathbf{u} + \epsilon)},$$

ove ε è un segmento che ha per limite zero col tendere di P' a P. Il prodotto del membro di destra è un prodotto geometrico; quindi se fosse $\epsilon \equiv 0$, ovvero se si trascura ϵ che ha per limite zero, ΔU si riduce al solo termine $\overline{PP'} \times \mathbf{u}$, e quindi l'incremento della funzione U è eguale alla grandezza di $\mathbf{u}$ moltiplicata per la proiezione di PP' sulla direzione di $\mathbf{u}$.

Eseguendo il prodotto indicato, si ha

$$\Delta U = \overline{PP'} \times \mathbf{u} + \alpha,$$

ove si è posto $\alpha = \overline{PP'} \times \varepsilon$, e quindi, se U ha per derivata $\mathbf{u}$, il numero α è infinitesimo d'ordine superiore al primo, ove si prenda la lunghezza di PP' per infinitesimo principale. Reciprocamente, se ΔU si può mettere sotto la forma $\overline{PP'} \times \mathbf{u} + \alpha$, ove α sia infinitesimo d'ordine superiore al primo, U ha per derivata $\mathbf{u}$; invero, se si determina il segmento ε che abbia la stessa direzione di PP' e tale che $\alpha = \overline{PP'} \times \overline{\epsilon} = gr\, PP' \times gr\, \epsilon$, si avrà $\Delta U = \overline{PP'} \times \overline{(\mathbf{u} + \epsilon)}$, e poichè $gr \epsilon = \frac{\alpha}{gr PP'}$ ha per limite zero, anche ϵ è infinitesimo, e quindi U ha per derivata $\mathbf{u}$.

3. Sia per esempio $U = \mathbf{a} \times \overline{OP}$, ove $\mathbf{a}$ e O sono un segmento ed un punto fissi. Sarà U funzione del punto P. Dato a questo punto una nuova posizione P', sarà

$$\Delta U = \mathbf{a} \times OP' - \mathbf{a} \times OP = PP' \times \mathbf{a},$$

e quindi ΔU si presenta sotto la forma $PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon)$, ove si faccia $\mathbf{u} \equiv \mathbf{a}$, ed $\epsilon \equiv 0$. Dunque $\mathbf{a}$ è la derivata di $\mathbf{a} \times OP$.

Si consideri ancora la funzione numerica $U = \overline{OP}^2$, ove O è una origine fissa. Data a P una nuova posizione P', sarà $OP' \equiv OP + PP'$. Elevando a quadrato si ha $\overline{OP'}^2 = \overline{OP}^2 + 2\overline{OP} \times \overline{PP'} + \overline{PP'}^2$. Quindi $\Delta U = \overline{OP'}^2 - \overline{OP}^2 = 2\overline{OP} \times \overline{PP'} + \overline{PP'}^2$, che si può scrivere

$$\Delta U = \overline{PP'} \times (2\overline{OP} + PP').$$

Perciò ΔU si presenta sotto la forma $PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon)$, ove si faccia

$\mathbf{u} \equiv 2\overline{OP}$ e $\epsilon \equiv PP'$; ed ϵ ha per limite zero se P′ tende a P. Dunque $\mathbf{u} \equiv 2OP$ è la derivata di $\overline{OP}^2$.

Per le funzioni numeriche della posizione d'un punto sussistono le stesse regole di derivazione che servono per le funzioni numeriche di numeri variabili. Così, per esempio:

Se U_1, U_2, ... sono funzioni della posizione d'un punto P, aventi derivate $\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2 ...$ la loro somma

$$U = U_1 + U_2 + ...$$

ha per derivata

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ...$$

cioè la somma geometrica (risultante) delle derivate delle funzioni che si sommano.

Invero, data al punto una nuova posizione P′, si ha

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + ...,$$

e, per la definizione delle derivate,

$$\Delta U_1 = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u}_1 + \epsilon_1}), \quad \Delta U_2 = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u}_2 + \epsilon_2}), ...;$$

onde sommando

$$\Delta U = PP' \times (\overline{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ... + \epsilon_1 + \epsilon_2 + ...}),$$

ovvero, posto

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ..., \quad \text{ed} \quad \epsilon \equiv \epsilon_1 + \epsilon_2 + ...,$$

si ha

$$\Delta U = PP' \times (\overline{\mathbf{u} + \epsilon}),$$

dove ϵ ha per limite zero; quindi U ha per derivata $\mathbf{u}$, c. v. d.

In modo analogo si potrebbero determinare le derivate di prodotti, quozienti, ecc. Ma tutte queste regole, compresa la precedente, sono contenute nel teorema che segue:

4. Teorema. — Se U_1, U_2, ... U_n sono funzioni numeriche

della posizione del punto P, aventi derivate $u_1, u_2, \dots u_n$, e U è una funzione numerica dei numeri $U_1\ U_2 \dots U_n$,

$$U = F(U_1, U_2, \dots U_n),$$

avente le derivate parziali di primo ordine continue, anche U ha derivata u, data dalla formula

$$u \equiv \frac{dF}{dU_1} u_1 + \frac{dF}{dU_2} u_2 + \dots + \frac{dF}{dU_n} u_n .$$

Infatti, date al punto variabile le posizioni P e P′, e detti ΔU_1, $\Delta U_2, \dots \Delta U_n$ e ΔU le differenze dei valori delle funzioni $U_1\ U_2 \dots U_n$ ed U, si ha, da una formula di calcolo,

$$\Delta U = \left(\frac{dF}{dU_1} + \alpha_1\right) \Delta U_1 + \left(\frac{dF}{dU_2} + \alpha_2\right) \Delta U_2 + \dots + \left(\frac{dF}{dU_n} + \alpha_n\right) \Delta U_n,$$

ove $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$ sono numeri aventi per limite zero ove tendano a zero gli incrementi di tutte le U. Ma, per la definizione delle derivate delle funzioni numeriche, si ha

$$\Delta U_1 = \overline{PP'} \times (\overline{u_1 + \epsilon_1}), \quad \Delta U_2 = \overline{PP'} \times (\overline{u_2 + \epsilon_2}),$$
$$\dots\dots, \ \Delta U_n = \overline{PP'} \times (\overline{u_n + \epsilon_n}),$$

ove $\epsilon_1\ \epsilon_2 \dots \epsilon_n$ sono segmenti infinitesimi con PP′. Sostituendo nella formola precedente, e fatto

$$u \equiv \frac{dF}{dU_1} u_1 + \frac{dF}{dU_2} u_2 + \dots + \frac{dF}{du_n} u_n ,$$

e $$\epsilon \equiv (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) + \left(\frac{dF}{dU_1} + \alpha_1\right) \epsilon_1 + \dots + \left(\frac{dF}{dU_n} + \alpha_n\right) \epsilon_n$$

si ricava

$$\Delta U = \overline{PP'} \times (\overline{u + \epsilon}),$$

ed ϵ ha per limite zero col tendere di P′ a P, onde U ha per derivata u.

Così per esempio, se

$$U = U_1 + U_2 - U_3 ,$$

le derivate parziali di U sono 1, 1, e — 1, e quindi

$$u \equiv u_1 + u_2 - u_3 .$$

Se $$U = U_1 \times U_2 ,$$

le derivate parziali di U sono U_2 e U_1, quindi

$$u \equiv u_1 U_2 + u_2 U_1 .$$

Se U è funzione d'un solo numero V, il quale è funzione del punto P, avente per derivata v, si avrà

$$u = \frac{dU}{dV} v.$$

Così, se V ha per derivata il segmento v, la funzione $\log V$ ha per derivata il segmento $\frac{1}{V} v$, e la funzione $\sqrt{V}$ ha per derivata $\frac{1}{2\sqrt{V}} v$, supposto in ambi i casi $V > 0$.

5. Teorema. — La derivata del numero che misura la distanza d'un punto fisso O dal punto mobile P, distinto da O, è un segmento avente la direzione e il senso del segmento OP ed eguale all'unità di misura.

Invero, sia r il numero che misura la distanza OP, e V il suo quadrato $V = r^2 = \overline{OP}^2$. Si è visto che la derivata di V vale $v \equiv 2\overline{OP}$; quindi la derivata di $r = \sqrt{V}$ vale

$$u \equiv \frac{1}{2\sqrt{V}} v \equiv \frac{OP}{\text{gr}\,OP} ;$$

che è appunto un segmento avente la direzione e il senso di OP, ma eguale in grandezza a $\frac{\text{gr}OP}{\text{gr}OP}$, cioè all'unità di misura.

La regola precedente non è più applicabile se $V = 0$, ossia se P coincide col punto O; in questo caso manca la derivata.

6. Più generalmente, se **F** è una figura fissa (linea o superficie), e se ad ogni punto P dello spazio, non appartenente alla figura, corrisponde un punto O di questa, in modo che la distanza OP

sia la minima fra le distanze dei punti della **F** dal punto P, e se inoltre col tendere di P ad una posizione speciale P_0, anche il punto O corrispondente a P ha per limite il punto corrispondente a P_0, allora la derivata del numero che misura la minima distanza del punto P dalla figura **F** è un segmento che ha la direzione di questa minima distanza, nel senso che va dalla figura al punto, ed eguale all'unità di misura.

Invero, sia r il numero che misura la distanza OP, e V il suo quadrato, $V = r^2 = \overline{OP}^2$. Data al punto P la nuova posizione P′, e detto O′ il punto corrispondente della figura, sarà $\Delta V = \overline{O'P'}^2 - \overline{OP}^2$. Ora, poichè OP è la minima distanza del punto P dai punti della figura, sarà $\overline{OP}^2 < \overline{O'P}^2$; in modo analogo $\overline{O'P'}^2 < \overline{OP'}^2$. Tenendo conto di queste diseguaglianze si ha

$$\overline{O'P'}^2 - \overline{O'P}^2 < \Delta V < \overline{OP'}^2 - \overline{OP}^2,$$

ovvero

$$PP' \times (O'P' + O'P) < \Delta V < PP' \times (OP' + OP).$$

Facciasi tendere P′ a P; anche O′ tende ad O, per la ipotesi fatta; e i segmenti OP, OP′, O′P e O′P′ hanno per limite OP; quindi, detti α e β due segmenti infinitesimi, sarà

$$PP' \times (2OP + \alpha) < \Delta V < PP' \times (2OP + \beta).$$

Siano α' e β' le proiezioni ortogonali di α e β su PP′. Sarà

$$PP' \times \alpha = PP' \times \alpha', \text{ e } PP' \times \beta = PP' \times \beta';$$

quindi la diseguaglianza precedente si può scrivere

$$PP' \times (2OP + \alpha') < \Delta V < PP' \times (2OP + \beta');$$

siccome i segmenti α' e β' hanno la stessa direzione, che è quella di PP′, si potrà determinare un segmento ϵ, avente pure la stessa direzione, tale che

$$\Delta V = PP' \times (2OP + \epsilon),$$

ed ϵ, che risulta compreso fra α' e β', avrà per limite zero, onde V ha per derivata 2OP. Quindi la derivata di $r = \sqrt{V}$ sarà

$$\frac{1}{2\sqrt{V}} 2OP \equiv \frac{OP}{gr\,OP},$$

ossia un segmento avente la direzione e senso di OP, ed eguale alla unità di misura.

Le condizioni restrittive enunciate sono verificate se la figura F è una retta od un piano; quindi:

Teorema. — La derivata del numero che misura la distanza del punto variabile P da una retta fissa o da un piano fisso, non passante per P, è un segmento avente la direzione della retta su cui giace questa distanza, nel senso che va dalla retta o piano fisso al punto P, ed è eguale all'unità di misura.

7. Teorema. — Se il numero U è funzione delle coordinate cartesiane ortogonali x, y, z del punto P, avente derivate parziali di primo ordine continue, la derivata di U è un segmento avente per coordinate $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$.

Invero, date a P due posizioni di coordinate x, y, z, e $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, se $U = f(x, y, z)$, sarà

$$\Delta U = \left(\frac{dU}{dx} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{dU}{dy} + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{dU}{dz} + \gamma\right)\Delta z.$$

Ora si ha

$$PP' \equiv \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k},$$

e se si fa

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dU}{dx}\mathbf{i} + \frac{dU}{dy}\mathbf{j} + \frac{dU}{dz}\mathbf{k}$$

e $$\bar{\epsilon} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

sarà $lim\, \epsilon = 0$, e

$$\Delta U = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u} + \epsilon}),$$

e quindi $\mathbf{u}$ è la derivata di U, c. v. d.

§ 2. Normali a curve e a superficie.

8. Sia U una funzione numerica della posizione del punto P. Il luogo dei punti per cui U ha un valore costante dato, vale a dire il luogo dei punti che soddisfanno all'equazione $U = c$, è, sotto certe condizioni restrittive, nello spazio, una superficie, e nel piano una curva.

Suppongasi invero U funzione continua di P, e che assuma per due posizioni A e B del punto P due valori, l'uno maggiore e l'altro minore di c. Se si uniscono i punti A e B con un cammino continuo, per un punto di questo cammino U assumerà necessariamente il valore c. E siccome sia nel piano che nello spazio due punti si possono unire fra loro con infiniti cammini non aventi di comune che gli estremi, si deduce che sonvi infiniti punti per cui $U = c$, e che questi separano la regione per cui U è maggiore di c da quella per cui U è minore di c.

Se, per una posizione speciale di P, U ha il valore c, ed ha derivata $\mathbf{u}$ non nulla, allora, se il punto P si sposta nella direzione di $\mathbf{u}$, U cresce, e se si sposta in direzione opposta, U diminuisce. Quindi in questo caso U assume valori maggiori e minori di c, e i punti per cui $U = c$ sono in numero infinito.

Se U ha, per una posizione speciale di P, il valore c, ed ha nelle vicinanze di P una derivata prima continua e non nulla, allora in quelle vicinanze i punti per cui $U = c$ formano appunto nel piano una linea, e nello spazio una superficie; vale a dire essi si possono

far corrispondere univocamente ad una, o a due variabili indipendenti. Per riconoscere questo, senza farne una dimostrazione diretta, basta riferire il punto P a coordinate cartesiane ortogonali x, y, z; e sia $U = f(x, y, z)$. Se U ha derivata **u** continua, anche $f(x, y, z)$ ha derivate parziali prime continue, e sarà

$$\mathbf{u} \equiv \frac{df}{dx}\,\mathbf{i} + \frac{df}{dy}\,\mathbf{j} + \frac{df}{dz}\,\mathbf{k},$$

e se **u** non è nullo, una almeno delle tre derivate $\frac{df}{dx}\,\frac{df}{dy}\,\frac{df}{dz}$ non è nulla, e quindi l'equazione $f(x, y, z) = c$ determina una delle coordinate in funzione delle altre due. (*Calc. diff.* N. 110 e 112).

9. Riconosciuto adunque che i punti per cui $U = c$ formano nel piano una linea, e nello spazio una superficie, possiamo proporci di determinarne la tangente, od il piano tangente.

Teorema. — Se U è funzione di P avente derivata **u** non nulla, la direzione di questa derivata è normale alla linea o superficie luogo dei punti per cui U è costante.

Invero, date al punto variabile due posizioni P e P′ per cui U abbia lo stesso valore, sarà $\Delta U = 0$, e per la definizione di derivata $\Delta U = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u} + \epsilon})$, ove $\lim \epsilon \equiv 0$. Quindi $PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon) = 0$. Questa formula dice che PP′ è normale al segmento $\mathbf{u} + \epsilon$. Se si fa ora tendere P′ a P, il segmento $\mathbf{u} + \epsilon$ ha per limite **u**; dunque l'angolo che PP′ fa con **u** ha per limite un retto, e quindi **u** è normale alla linea, o superficie luogo dei punti per cui U è costante.

10. Ecco alcune applicazioni delle proposizioni precedenti.

1) Siano $r_1\ r_2 \dots r_n$ le distanze del punto P da n punti fissi $A_1\ A_2 \dots A_n$, e sia

$$U = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n.$$

Sarà U funzione della posizione del punto P, e, dette $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n$

le derivate di $r_1\, r_2 \ldots r_n$, che sono segmenti eguali all'unità di misura, e diretti secondo A_1P, A_2P, ... A_nP, la derivata di U sarà

$$m_1\mathrm{u}_1 + m_2\mathrm{u}_2 + \ldots + m_n\mathrm{u}_n\,;$$

e poichè la direzione di questa derivata è normale al luogo dei punti per cui U è costante, si deduce:

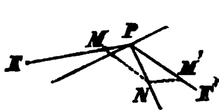
La normale al luogo dei punti, per cui è costante la somma delle distanze da n punti dati moltiplicate per n numeri dati, si ottiene conducendo dal punto considerato del luogo dei segmenti diretti ai punti dati e proporzionali ai numeri dati; la loro risultante è la normale cercata.

Quanto precede è vero sia nel piano che nello spazio; specializzando il numero dei punti dati e le costanti date, si ottengono risultati notevoli.

Così, per esempio, il luogo dei punti, per cui è costante la somma delle distanze da due punti F ed F′, è un'ellisse di cui F ed F′ sono i fuochi; e la costruzione precedente dice che la normale all'ellisse è la bissetrice interna dei raggi focali.

Il luogo dei punti per cui è costante la differenza delle distanze dei punti F e F′ è un iperbole, di cui questi punti sono i fuochi; e la normale all'iperbole è la bissetrice esterna dei ràggi focali.

Il luogo dei punti P per cui è costante la somma delle distanze da due punti dati F ed F′ moltiplicate pei numeri m ed m' è una curva detta *ovale di Cartesio*. Se sulle rette PF e PF′ si portano i segmenti PM e PM′ proporzionali ad m ed m', la loro risultante PN è la normale alla curva in P. Detti i ed r gli angoli FPN e NPF′ = MNP, che i raggi FP e PF′ fanno colla normale PN alla curva, si deduce dal triangolo MNP



$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{PM'}}{\mathrm{PM}} = \frac{m'}{m}\,.$$

Quindi, se si immagina che l'ovale di Cartesio sia la linea di separazione di due mezzi trasparenti, il cui indice di rifrazione relativo

sia $\frac{m'}{m}$, e che raggi luminosi partenti da F vengano a rifrangersi sulla curva, in virtù di una nota legge fisica attribuita pure a Cartesio, i raggi rifratti, od i loro prolungamenti, vengono tutti a passare per F'.

2) La parabola conica si può definire come il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso F (*fuoco*) e da una retta fissa *d* (*direttrice*). Dette r e r' le distanze d'un punto P da F e da d, la funzione

$$U = r - r'$$

sarà, pei punti della parabola, costantemente nulla. Quindi la normale alla parabola è la risultante di due segmenti eguali all'unità di misura, l'uno diretto secondo FP, e l'altro avente la direzione della normale abbassata da F sulla retta d. Si scorge immediatamente che la normale alla parabola è la bissettrice esterna dell'angolo formato dal raggio focale e dalla perpendicolare alla direttrice.

3) Com'è noto, ogni conica è il luogo dei punti per cui è costante il rapporto delle distanze da un punto fisso F (fuoco) e da una retta fissa d (direttrice). Dette ancora r e r' le distanze del punto P da F e da d, la funzione $\frac{r}{r'}$ è costante pei punti della conica. La derivata di questa funzione è $\frac{r'\mathbf{u} - r\mathbf{u}'}{r'^2}$, ove $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ siano le note derivate di r e r'. Dalla costruzione di questa derivata si ha la seguente costruzione della normale alla curva: si porti sulla direzione di PF un segmento eguale a Pd, e sulla direzione di Pd, ma in senso opposto (cioè nel senso dP), un segmento eguale a PF; la risultante di questi segmenti è normale alla conica in P.

4) Dicesi *ovale di Cassini* il luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze da due punti dati F ed F'. Dette r e r' le distanze del punto P da F e F', e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ le loro derivate, sarà,

pei punti della curva, costante la funzione rr'; e la derivata di questa funzione, cioè $\mathrm{u}r' + \mathrm{u}'r$, è normale alla curva. Quindi si porti sulla direzione di PF un segmento eguale a PF', e sulla direzione di PF' un segmento eguale a PF; la loro risultante sarà normale alla curva.

5) Il luogo dei punti, nel piano, per cui è costante la somma dei quadrati delle distanze da due rette date l e l', è, com'è noto, una ellisse il cui centro è il punto ll', e i cui diametri equiconiugati sono diretti secondo l e l'. Pei punti di questa curva è costante la funzione $r^2 + r'^2$ ove r e r' siano le distanze PM e PM' di P dalle rette. La derivata di questa funzione è $2(r\mathrm{u} + r'\mathrm{u}')$; quindi la risultante dei segmenti PM e PM' è la normale alla curva in P.

6) Si immagini nello spazio la superficie i cui punti distano egualmente da due rette date l e l', e che si dimostra essere un paraboloide iperbolico. Dette r e r' le distanze del punto P dalle due rette, la funzione $r - r'$ avrà il valore costante 0 pei punti della superficie. Se da P si conducono due segmenti perpendicolari alle rette date, eguali fra di loro, il primo nel verso dal punto P alla l, e il secondo nel verso dalla retta l' al punto P, la loro risultante è normale alla superficie. Si vede di qui che il piano tangente alla superficie biseca l'angolo formato dalle perpendicolari abbassate da P sulle rette date.

7) Il luogo dei punti equidistanti da tre rette date $l\ l'\ l''$ nello spazio è una curva, la quale giace ad un tempo e sulla superficie i cui punti equidistano da l e l', come pure sulla superficie i cui punti equidistano da l e l''. Quindi la tangente alla curva in un suo punto P si ottiene a questo modo. Da P si abbassino le perpendicolari PA, PB, PC sulle rette date. I piani perpendicolari alle faccie APB, BPC e CPA del triedro, nelle bissettrici di queste faccie, passano per una retta che è la tangente cercata.

8) Se U, funzione del punto P, ha per derivata **u**, detto M un punto del piano tangente alla superficie per cui U è costante, sarà

$$PM \times \mathbf{u} = 0$$

l'equazione del piano tangente. Riferito il sistema a coordinate cartesiane ortogonali, dette x, y, z le coordinate di P, e X, Y, Z quelle di M, e fatto $U = F(x, y, z)$, le coordinate di **u** sono $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$; quindi l'equazione del piano tangente diventa (p. 122):

$$(X - x)\frac{dF}{dx} + (Y - y)\frac{dF}{dy} + (Z - z)\frac{dF}{dz} = 0.$$

9) I punti del piano, per cui è costante la minima distanza da una linea data in questo piano, formano una linea che dicesi *parallela* alla data.

Il luogo dei punti nello spazio, per cui è costante la minima distanza da una linea data dicesi *superficie tubulare*.

La superficie luogo dei punti nello spazio, pei quali è costante la minima distanza da una superficie data, dicesi *parallela* a questa.

Se P è un punto del luogo, e PM la sua minima distanza dalla linea o superficie data, supposte verificate le condizioni del N. 6, sarà PM normale al luogo dei punti P. Vedremo presto che, sotto certe condizioni restrittive, PM è anche normale alla linea o superficie data.

§ 8. Massimi e minimi.

11. Sia U una funzione numerica della posizione del punto P, avente derivata **u**. Data al punto la nuova posizione P′, sarà

$$\Delta U = PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon) \qquad (\lim \epsilon = 0).$$

Si dividano ambo i membri per la grandezza di PP′. Sarà

$$\frac{\Delta U}{gr PP'} = \frac{PP'}{gr PP'} \times (\mathbf{u} + \epsilon),$$

ed il segmento $\frac{PP'}{gr PP'}$ è diretto secondo PP′ ed eguale all'unità di misura. Si faccia ora tendere P′ verso P, in modo che $\frac{PP'}{gr PP'}$ tenda ad un limite **p**, il quale sarà pure un segmento eguale all'unità di misura; sarà $lim \frac{\Delta U}{gr PP'} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}$. Ora, supposto **u** non nullo, se l'angolo $\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{u}}$ è acuto, sarà $\mathbf{p} \times \mathbf{u} > 0$, e poichè gr PP′ è un numero positivo, sarà anche, per posizioni di P′ sufficientemente prossime a P, $\Delta U > 0$. Se invece l'angolo $\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{u}}$ è ottuso, sarà $\mathbf{p} \times \mathbf{u} < 0$, e, per posizioni di P′ sufficientemente prossime a P, sarà $\Delta U < 0$. Noi diremo che il punto P si sposta nella direzione e senso del segmento **p**, eguale all'unità di misura, se, essendo P′ una sua nuova posizione, $lim \frac{PP'}{gr PP'} = \mathbf{p}$. Quindi, da quanto si disse, si conchiude che:

Se U è funzione numerica del punto P, avente derivata **u** non nulla, se il punto P si sposta nella direzione e senso del segmento **p** che fa un angolo acuto con **u**, U cresce; se invece la direzione e senso in cui si sposta P fa un angolo ottuso con **u**, U diminuisce.

Questa proposizione serve nella ricerca dei massimi e minimi valori che assume U, qualora P varii o liberamente nello spazio, ovvero sia obbligato a condizioni restrittive, come a descrivere una linea od una superficie data. Se U diventa massima per una posizione speciale di P, è necessario che spostando P in ogni direzione e senso compatibile colle condizioni imposte, U diminuisca; e se U è minima per la posizione considerata di P, spostando P in ogni direzione e senso possibile, U deve crescere.

12. Teorema. — Se U è funzione numerica del punto P variabile liberamente nello spazio, e se corrispondente-

mente ad una posizione di questo punto U diventa massima o minima, la derivata u di U, se esiste, è nulla.

Invero, se la derivata u non è nulla, spostando P in una direzione che faccia un angolo acuto con u, U cresce, e quindi non è massima corrispondentemente al punto considerato; spostando invece P in una direzione che faccia un angolo ottuso con u, U diminuisce, e quindi non è minima. Dunque, se u non è nullo, U non è nè massima nè minima.

Teorema. — Se U è funzione numerica del punto P, il quale sta su d'una linea l, e, corrispondentemente ad una posizione speciale di P, U diventa massima o minima, se U ha derivata u, e la linea l ha in P una tangente, e questo punto non è di regresso sulla linea, la proiezione di u sulla tangente alla linea è nulla.

Invero, se la proiezione di u sulla tangente non è nulla, sarà anche u non nullo, nè normale alla linea. Ora, in virtù delle ipotesi fatte, il punto P si può spostare sulla linea, nella direzione della tangente, in due sensi opposti; e uno di questi fa con u un angolo acuto, e l'altro un angolo ottuso; quindi secondochè si sposta in un senso o nell'altro, U cresce, o diminuisce, e non è nè massima nè minima.

Teorema. — Se U è funzione numerica del punto P, il quale sta su d'una superficie S, e, corrispondentemente ad una posizione speciale di P, U diventa massima o minima, se U ha derivata u, e la superficie un piano tangente in P, e se sulla superficie si possono segnare almeno due linee passanti per P, aventi ivi tangenti distinte, e per le quali P non sia un punto di regresso, la proiezione di u sul piano tangente alla superficie è nulla.

Invero, le proiezioni di u sulle due tangenti alle linee descritte sulla superficie sono nulle; dunque o u è nullo, ovvero è normale alle due tangenti, e quindi normale al piano tangente, che le con-

tiene. In ogni caso la proiezione di **u** sul piano tangente è nulla.

Questi teoremi sono una utile guida ed una regola di esclusione pella ricerca dei massimi e minimi d'una funzione U; per applicarli effettivamente, converrà determinare dapprima quei punti i quali soddisfano alle condizioni enunciate; e poi discutere se ad essi corrisponde un massimo, od un minimo, o nè l'uno nè l'altro. Questa discussione può essere più o meno facile a seconda della natura del problema; noi ne daremo alcuni esempi.

13. Si consideri la distanza del punto variabile P dal punto fisso O. La sua derivata **u** è un segmento diretto secondo OP, ed eguale all'unità di misura, salvochè P coincida con O, nel qual caso non si ha derivata. Quindi, in virtù di quanto si è detto, se P varia liberamente nello spazio, la sua distanza da O non diventa nè massima nè minima per alcuna posizione del punto, salvochè esso venga a coincidere con O. È evidente che, in questo ultimo caso, quella distanza diventa zero, che è il suo più piccolo valore.

Ma se P sta su d'una linea, e, corrispondentemente ad una sua posizione speciale distinta da O, OP è massima o minima, se la linea ha ivi una tangente, e il punto non è un punto di regresso, deve OP essere normale alla linea. Analogamente per le superficie. Ma il determinare i punti della linea, o superficie, le cui normali passano per O, e il riconoscere se la loro distanza sia massima o minima, è problema più o meno complicato, a seconda della natura della linea o superficie data. È noto come si determini facilmente la minima distanza da un punto ad una retta o piano dato, e la massima o minima distanza da un punto ad un cerchio o sfera data.

14. Si consideri la somma delle distanze del punto P dai punti fissi A e B. La sua derivata **u** è la risultante di due segmenti eguali diretti secondo AP e BP. Essa è nulla se P è un punto interno al segmento AB, non esiste se P coincide in A o B, ed è diversa da zero e la sua direzione è quella della bissettrice interna dell'angolo APB per ogni altra posizione di P. Quindi, se P è va-

riabile liberamente nello spazio, la somma delle sue distanze da A e B non può diventar massima o minima per alcuna posizione di P che non appartenga al segmento AB, compresi gli estremi. Si vede immediatamente che in questo caso essa assume il suo piccolo valore.

Ma se il punto P sta su d'una linea fissa, e per una sua posizione speciale quella somma diventa massima o minima, se questo punto non appartiene al segmento AB, e se la linea ha ivi tangente, e il punto non è un punto di regresso, la bissetrice dell'angolo APB deve essere normale alla linea, ovvero anche le rette AP e PB devono fare colla tangente angoli eguali. Analogamente per le superficie.

Ecco come si può trattare il problema in un caso particolare.

Determinare su d'una retta data l il punto per cui è minima la somma delle distanze da due punti dati A e B.

Se la retta l incontra il segmento AB in un punto P interno od estremo al segmento, sarà evidentemente P il punto cercato.

Se la retta l non incontra AB, si faccia ruotare il piano lB attorno alla l finchè esso venga a coincidere col piano lA, ed in modo che il punto A e la nuova posizione di B, che diremo B', giacciano da parti opposte della l. La retta AB' incontri la l in P; dico che P è il punto cercato. Invero sia Q un altro punto della l; sarà $PB = PB'$, $QB = QB'$; quindi $PA + PB = PA + PB' = AB'$, e $QA + QB = QA + QB' > AB'$; dunque $PA + PB < QA + QB$, c. v. d.

In modo analogo si determina il punto d'un piano per cui è minima la somma delle distanze da due punti dati. Ma se il luogo del punto P è p. e. un cerchio, anche supposti i punti A e B nel piano di questo cerchio, il determinare i punti del cerchio per cui le PA e PB fanno angoli eguali colla tangente è un celebre problema di grado superiore al secondo (problema di *Alhazen*).

15. Si consideri ancora la somma delle distanze del punto P da tre punti fissi ABC. La sua derivata è la risultante di tre segmenti

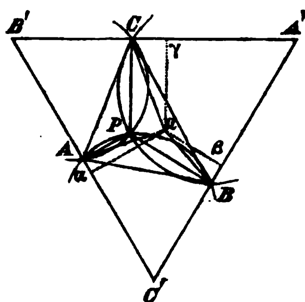
eguali all'unità di misura, e diretti secondo AP, BP, CP, salvochè P coincida con uno dei tre punti dati. Quindi, se P varia liberamente nello spazio, affinchè corrispondentemente ad una posizione speciale quella somma sia massima o minima, deve o P coincidere con uno dei punti ABC, ovvero deve annullarsi la risultante di tre segmenti diretti secondo PA, PB e PC ed eguali; ed affinchè questo avvenga è necessario che P giaccia nel piano ABC, e che le rette PA PB PC facciano a due a due angoli di 120°.

Ecco la trattazione rigorosa di questa questione.

Determinare il punto P per cui è minima la somma delle distanze da tre punti dati ABC.

Si supponga dapprima che nel triangolo ABC tutti gli angoli siano minori di 120°. Si descriva su AB un arco di cerchio giacente dalla parte di AB verso cui è posto C, e capace dell'angolo di 120°; e su AC un arco di cerchio analogo, pure capace dello stesso angolo. Questi archi si incontrino in P; dico che P è il punto cercato.

Invero, preso nel piano un altro punto Q, si conducano in A B C le normali alle PA PB PC le quali formano il triangolo A'B'C'. Gli angoli di questo triangolo sono supplementari di 120°, ossia valgono 60°, ed il triangolo A'B'C' è equilatero. Dal punto Q si abbassino le perpendicolari $Q\alpha$, $Q\beta$, $Q\gamma$ sui lati di A'B'C'. È noto dalla geometria che $Q\alpha + Q\beta + Q\gamma \geqq PA + PB + PC$, e precisamente, se Q è pure interno al triangolo A'B'C' si ha il segno $=$, e se esterno, il $>$. Ora, $QA > Q\alpha$, $QB > Q\beta$, $QC > Q\gamma$, perchè la perpendicolare è minore dell'obliqua;



dunque $QA + QB + QC > PA + PB + PC$, ossia la somma delle distanze di P dai punti ABC è minore della somma analoga per ogni altro punto del piano ABC.

Se poi si considera un punto R nello spazio, sia Q la sua proiezione di sul piano ABC. Sarà

$$RA > QA, \quad RB > QB, \quad RC > QC;$$

quindi

$$RA + RB + RC > QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Dunque effettivamente la somma delle distanze del punto P dai punti ABC è minore della somma analoga per ogni altro punto dello spazio.

Si lascia al lettore l'esame del caso in cui un angolo superi i 120°, nel qual caso il vertice di quest'angolo è il punto cercato.

16. Il numero U potrebbe anche essere funzione della posizione di più punti P, Q, R, ..., e se, corrispondentemente ad una loro posizione speciale, U diventa massima o minima, supposti fissi tutti i punti uno eccettuato, la U diventa funzione di questo solo punto, che, per la sua posizione considerata, deve diventare massima o minima.

Così ad esempio, se PQ sono due punti appartenenti rispettivamente a due linee date l ed l', e se per essi è minima (o massima) la distanza fra due punti appartenenti alle linee, deve PQ essere la minima distanza di P da ogni punto Q della seconda linea, come pure la minima distanza del punto Q da ogni punto P della prima linea; quindi, se P e Q sono punti ordinarii delle due linee, deve la PQ essere una loro normale comune.

Se PQR sono tre punti di tre linee date, e corrispondentemente ad una loro posizione il perimetro del triangolo ABC, cioè la somma delle distanze $PQ + QR + RP$, è massimo o minimo, mantenendo fissi Q ed R, deve $PQ + PR + QR$ essere minima per quella posizione considerata di P, e quindi le rette PQ e PR debbono essere egualmente inclinate rispetto alla tangente alla linea luogo dei punti P. Analogamente le QP e QR sono egualmente inclinate rispetto alla seconda linea, e lo stesso avviene di RP e RQ rispetto alla terza.

Esercizii.

17. 1. Sia O un punto fisso, ed l una retta fissa che supporremo passante per O; sia P un punto variabile. La derivata dell'angolo che la retta OP fa colla l è un segmento contenuto nel piano lOP, normale ad OP, e la cui grandezza vale il reciproco della grandezza di OP.

2. Sia O un punto fisso, e π un piano fisso. La derivata dell'angolo che la retta OP fa con π è un segmento contenuto nel piano normale a π e passante per OP; questo segmento è normale ad OP, e la sua grandezza vale il reciproco della grandezza di OP.

3. Siano nel piano n punti $A_1 A_2 ... A_n$, ed l una retta arbitraria. Dette $r_1 r_2 ... r_n$ le distanze d'un punto P dai punti fissi, e $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ gli angoli che le rette A_1P, A_2P, ... formano colla retta fissa l, per ogni punto del piano passa una curva per cui è costante la funzione $\log r_1 + \log r_2 + ... + \log r_n$, ed una curva per cui è costante la funzione $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Queste due curve si incontrano ad angolo retto.

Se i punti dati sono due, le prime curve sono ovali di Cassini, e le seconde iperboli equilatere.

4. Il luogo dei punti P per cui è costante la somma degli angoli che OP fa con due rette fisse a e b, che supporremo passanti per O, è un cono di vertice O, che coincide col luogo delle rette OP che fanno colle due rette date angoli la cui somma è costante. Il piano tangente a questo cono lungo una generatrice OP è il piano che biseca esternamente l'angolo diedro formato dai piani OPa e OPb.

5. Si consideri il cono di vertice O luogo delle rette OP per le quali è costante una data funzione analitica $f(\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n)$ degli angoli $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ che esse fanno con altrettante rette fisse $a_1 a_2 ... a_n$, che supporremo passanti per O. Si immagini il piano normale alla retta OP; si proiettino su questo piano le rette $a_1 a_2 ... a_n$, e si portino su queste proiezioni dei segmenti proporzionali a $\frac{df}{d\alpha_1}, \frac{df}{d\alpha_2}, \dots \frac{df}{d\alpha_n}$. La loro risultante è normale al piano tangente al cono lungo la generatrice OP.

6. Determinare su d'una retta il punto per cui è massima la differenza delle distanze da due punti dati.

7. Determinare su d'una retta data il punto per cui è minima la somma delle distanze da un punto dato e da una retta data. I punti e le rette date stanno in un piano.

8. Determinare su d'una retta r data il punto per cui è massima o minima la somma o la differenza delle distanze da due linee l ed l', date comunque nello spazio.

Si facciano ruotare le due linee l ed l' attorno ad r; esse genereranno due superficie di rivoluzione; siano m ed m' le intersezioni di un piano passante per r con queste superficie (cioè i loro meridiani); sia AB la massima o minima distanza delle due linee m ed m'; e la retta AB incontri la r in P. Se P è un punto medio del segmento AB, esso è il punto della r per cui è massima o minima la somma delle distanze da l ed l'; se invece P appartiene al prolungamento di AB, esso è il punto per cui è massima o minima la differenza delle distanze delle l ed l'.

9. Determinare su d'una retta, o su d'un piano, il punto per cui è minima la somma dei quadrati delle distanze da due punti dati.

È il punto medio delle proiezioni dei punti dati.

10. Determinare su d'una retta o su d'un piano il punto per cui è massima o minima la somma dei quadrati delle distanze da n punti dati, moltiplicate per n numeri dati.

È la proiezione del baricentro dei punti dati, cui siano affissi i numeri dati.

11. Determinare il punto per cui è minima la somma delle distanze dai quattro vertici d'un quadrilatero piano convesso.

È il punto d'incontro delle diagonali.

12. Determinare il triangolo ABC, i cui vertici stanno su tre rette date nello spazio, e la cui area è minima, ovvero il cui perimetro è minimo, ovvero il cui cerchio circoscritto è minimo.

Le altezze del triangolo, ovvero le bissetrici, ovvero i raggi del cerchio circoscritto che vanno ai vertici del triangolo, debbono essere rispettivamente normali alle rette date.

CAPITOLO V.

Grandezze geometriche.

---

§ 1. Definizioni.

1. Sonvi delle categorie di grandezze geometriche tali che prese due grandezze della stessa categoria, non si può presentare che l'uno o l'altro di questi due casi: 1° le due grandezze si possono sovrapporre, o si possono decomporre in parti a due a due sovrapponibili; e allora si dicono *eguali;* 2° le due grandezze si possono decomporre in parti in modo che ogni parte della seconda sia eguale ad una delle parti della prima, ma non viceversa, e allora le due grandezze diconsi *diseguali*, e la prima maggiore della seconda.

Questo avviene per le lunghezze di segmenti rettilinei, per le aree piane limitate da linee rette, pei volumi di prismi o di solidi decomponibili in prismi, e per alcune altre categorie di grandezze geometriche, che soglionsi chiamare *principali*. Ma sonvi altre grandezze, per le quali può avvenire che, paragonandone due, non si presenti nè l'uno nè l'altro dei due casi suddetti. Per queste grandezze è necessario di ben definire che cosa si intenda per eguaglianza di due grandezze, e per misura d'una di tali grandezze.

2. Diremo *campo di punti*, od anche *figura*, ogni insieme di punti, in numero limitato od illimitato. Così alcuni punti in numero finito, i punti d'una linea, d'una superficie, d'un solido, sono campi di punti.

Un campo di punti si dirà *rettilineo*, se tutti i punti stanno su d'una retta; si dirà *piano*, se tutti i punti stanno in un piano. Noi comincieremo a studiare i campi rettilinei.

Sia A un campo rettilineo. Si dirà che un punto P è *interno* al campo A, se è possibile determinare una lunghezza ρ in guisa che tutti i punti della retta, i quali distano da P meno di ρ, appartengano al campo A. Si dirà che un punto è *esterno* al campo A, se è possibile determinare una lunghezza ρ in guisa che tutti i punti della retta, i quali distano dal punto P meno di ρ, non appartengano ad A. Un punto nè interno nè esterno ad A si dirà *punto limite* di A; quindi, se P è un punto limite di A, fissata comunque una lunghezza ρ, si troveranno sempre dei punti sulla retta, che distano da P meno di ρ, e che appartengono al campo A, e dei punti, che pure distano da P meno di ρ, e che non appartengono ad A. I punti limiti di A possono appartenere, ovvero non, al campo A; essi formano un nuovo campo, che si dirà *campo limite* di A.

È noto che ad ogni punto P d'una retta si può far corrispondere la sua ascissa, ossia il numero che misura la sua distanza da un punto fisso della retta, tenendo il debito conto del segno. Converremo che, reciprocamente, ad ogni numero corrisponda sulla retta uno ed un sol punto avente per ascissa quel numero. Quindi ad ogni campo A corrisponde un gruppo di numeri, o, come diremo, *campo di numeri;* e viceversa, ad ogni campo di numeri corrisponde un campo di punti sulla retta. A causa di questa corrispondenza univoca, potremo, ove ci convenga, invece dei campi rettilinei di punti, considerare dei campi di numeri.

Come esempi, si considerino sulla retta i punti le cui ascisse sono maggiori di 0 e minori di 1. Si avrà un campo rettilineo di punti; ogni punto del campo è interno al medesimo; i punti limiti sono i punti di ascisse 0 ed 1; ogni altro punto è esterno al campo.

Si considerino ancora i punti della retta, le cui ascisse sono numeri razionali, maggiori di 0 e minori di 1. Questo campo non avrà punti interni; i punti le cui ascisse sono $\geqq 0$, e $\leqq 1$, sono punti limiti; gli altri punti sono esterni.

Se un campo di punti contiene alcuni, ma non tutti i punti della retta, esso avrà certamente dei punti limiti. Invero, suppongasi che P sia un punto del campo dato A, e Q un punto non appartenente ad A. Siano p e q le ascisse dei punti P e Q, e sia p. e. $p < q$. I punti del campo A, le cui ascisse sono minori di q, avranno un limite superiore, non minore di p, perchè p è appunto l'ascissa d'uno di tali punti, nè maggiore di q; sia r questo limite superiore, e R il punto della retta avente per ascissa r. Dico che R è un punto limite di A. Invero, fissata ad arbitrio una lunghezza ρ, esiste qualche punto del campo A la cui ascissa è maggiore di $r-\rho$, e quindi tale che la sua distanza da R è minore di ρ; mentrechè ogni punto la cui ascissa è compresa fra r e la più piccola delle due quantità $r+\rho$ e q, i quali punti distano pure da R meno di ρ, non appargono al campo.

I punti d'una retta, che stanno fra due punti dati, contando ovvero non questi punti, formano un campo, che si dirà *segmento rettilineo*. La sua lunghezza è una grandezza principale; ogni campo formato da un numero finito di segmenti ha pure una lunghezza paragonabile a quella d'un segmento rettilineo.

Abbiasi ora un campo formato da punti in linea retta, dato in un modo qualunque. Potremo in generale immaginare dei campi formati da un numero finito di segmenti, e dei quali fa parte il campo dato; e potremo immaginare dei campi formati pure da un numero finito di segmenti, i quali fanno parte del campo dato. Ciascheduno di questi campi ha una lunghezza, e la lunghezza dei primi è maggiore della lunghezza dei secondi.

Se il limite inferiore delle lunghezze dei primi campi coincide col limite superiore delle lunghezze dei secondi, al valore comune di questi due limiti daremo il nome di *lunghezza del campo rettilineo* dato.

Ma potrebbe avvenire che questi due limiti non siano eguali, e quindi, che il limite inferiore delle prime lunghezze sia maggiore del limite superiore delle seconde. In questo caso diremo che il campo proposto non ha una lunghezza paragonabile con quella d'un segmento rettilineo; e al limite inferiore delle prime lunghezze po-

tremo dare il nome di *lunghezza esterna* del campo dato, e chiamare *lunghezza interna* il limite superiore delle seconde. Potrebbe anche avvenire che non esistano campi formati da segmenti, i quali contengano il campo dato, nel qual caso diremo che la lunghezza esterna del campo è infinita; ovvero che non esistano segmenti contenuti nel campo dato, e allora diremo che la sua lunghezza interna è nulla. Così dei due esempi già portati, il primo campo è un segmento avente lunghezza $= 1$; il secondo campo non ha lunghezza paragonabile con quella d'un segmento; la sua lunghezza esterna vale 1, e la sua lunghezza interna è nulla.

Se da un campo formato da un numero finito di segmenti, e contenente nel suo interno A, si toglie un campo pure formato da un numero finito di segmenti, contenuto nell'interno di A, si avrà un campo formato altresì da un numero finito di segmenti, la cui lunghezza vale la differenza fra le lunghezze del primo e del secondo campo, e che contiene nel suo interno tutti i punti limiti di A. Ora affinchè A abbia una lunghezza paragonabile con un segmento, è necessario e sufficiente che la differenza fra le lunghezze dei primi campi e quelle dei secondi possa rendersi tanto piccola quanto si vuole; quindi è necessario e sufficiente che si possa costrurre un campo formato da segmenti in numero finito, contenente nel suo interno tutti i punti limiti di A, e di grandezza tanto piccola quanto si vuole. In ogni caso si vede che la differenza fra la lunghezza esterna e la lunghezza interna d'un campo A è eguale alla lunghezza esterna del campo limite di A.

3. Aree piane. Le cose dette pei campi rettilinei si possono ripetere pei campi di punti che giacciono in uno stesso piano. Diremo che un punto P è *interno* al campo piano A, se è possibile determinare una lunghezza ρ in guisa che tutti i punti del piano, che distano da P meno di ρ, appartengano ad A. Un punto si dirà *esterno* al campo A se è interno al campo formato dai punti non appartenenti ad A. Un punto nè interno nè esterno si dirà *punto limite*. Il campo formato dai punti limiti di A si dirà *campo limite*, o *contorno* di A.

Se il campo A contiene alcuni punti del piano, senza contenerli tutti, esso avrà dei punti limiti. Invero, se P e Q sono due punti, l'uno appartenente, e l'altro non, al campo A, si consideri il campo formato dai punti del campo A che giacciono sulla retta PQ. Esso avrà, per quanto si è sopra dimostrato, almeno un punto limite appartenente al segmento PQ, ed esso sarà un punto limite del campo A.

Abbiasi un campo piano qualunque. Potremo in generale immaginare delle aree piane limitate da linee rette, che contengono nel loro interno il campo A, e delle aree piane, pure limitate da linee rette, contenute nell'interno del campo dato. Se, come avviene nei casi più comuni, il limite inferiore delle prime aree coincide col limite superiore delle seconde, al valor comune di questi due limiti daremo il nome di *area* del campo piano dato.

Ma potrebbe avvenire che questi limiti non siano eguali; in questo caso chiameremo *area esterna* della figura data il limite inferiore delle aree poligonali che contengono nel loro interno la figura data, e *area interna* della figura il limite superiore delle aree poligonali contenute nell'interno di essa.

Se da un campo limitato da linee rette, contenente nel suo interno il campo A, si toglie un campo pure limitato da linee rette e contenuto in A, si ottiene un campo (striscia) limitato da linee rette e che contiene nel suo interno il campo limite di A. L'area di questo campo è la differenza fra le aree dei due primi. Quindi noi ci assicureremo che il limite inferiore delle prime aree coincide col limite superiore delle seconde, se la loro differenza si può rendere tanto piccola quanto si vuole; vale a dire affinchè un campo piano abbia un'area paragonabile ad un'area poligonale è necessario e sufficiente che si possa formare un campo piano limitato da rette, contenente nel suo interno tutti i punti limiti del campo dato, e la cui area sia tanto piccola quanto si vuole. Potrebbe anche avvenire che non esista alcun poligono, di area finita, contenente nel suo interno il campo dato, e allora si dirà che l'area esterna di questo campo è infinita. Se non esiste alcun poligono contenuto nell'interno del campo dato, si dirà che la sua area interna è nulla.

È noto, p. e., come si dimostri in geometria elementare che se la figura data è un cerchio, il limite superiore delle aree dei poligoni interni coincida col limite inferiore delle aree dei poligoni che comprendono il cerchio, e che quindi il cerchio abbia un'area paragonabile alle aree poligonali. Se si immagina il campo formato dai punti del piano la cui distanza da un punto fisso O è razionale (rispetto ad una lunghezza $=1$) e minore di 1, si avrà un campo piano la cui area interna è nulla, e la cui area esterna vale l'area del cerchio di raggio 1.

4. Alle aree così definite si possono estendere alcune proposizioni che si riferiscono alle aree piane. Così è noto che se si proietta ortogonalmente un'area piana poligonale sopra un secondo piano, l'area proiezione è eguale all'area proiettata moltiplicata pel coseno dell'angolo dei due piani. Sia ora A un campo piano qualunque, e sia A′ la sua proiezione ortogonale su d'un secondo piano che faccia col primo l'angolo α. Ogni poligono P contenente nel suo interno il campo A si proietta secondo un poligono P′ contenente nel suo interno A′, e viceversa, ogni poligono P′ contenente A′ è la proiezione d'un poligono P contenente A. Ma l'area del poligono P′ è eguale all'area di P moltiplicata per $\cos\alpha$; quindi il limite inferiore delle aree dei poligoni P′ è eguale al limite inferiore delle aree dei poligoni P moltiplicato per $\cos\alpha$. Ma il limite inferiore delle aree dei poligoni P è l'area esterna di A, il limite inferiore delle aree dei poligoni P′ è l'area esterna di A′; dunque l'area esterna della proiezione d'un campo dato vale l'area esterna di questo campo moltiplicata per $\cos\alpha$. In modo analogo si dimostra che l'area interna della proiezione del campo vale l'area interna di questo campo moltiplicata per $\cos\alpha$. Se il campo che si proietta ha un'area paragonabile alle poligonali, ossia se coincidono le aree esterna ed interna, si deduce che lo stesso avviene per la sua proiezione, e l'area proiezione è eguale all'area proiettata moltiplicata pel coseno dell'angolo che fanno i piani delle due aree.

Come applicazione, se si proietta un cerchio di raggio a su d'un piano che faccia col primo l'angolo α, si otterrà un'ellisse i cui

semiassi sono a e $b = a \cos\alpha$; e poichè l'area del cerchio vale πa^2, l'area dell'ellisse vale $\pi a^2 \cos\alpha = \pi ab$; ossia l'area d'un ellisse è eguale all'area del cerchio il cui raggio sia la media geometrica fra i semiassi della ellisse.

In modo analogo si dimostra che in due figure piane simili le aree (esterne, o interne, o proprie) stanno come i quadrati dei lati omologhi.

5. Volumi. Abbiasi un campo di punti nello spazio. Un punto si dirà *interno* al campo se esiste una sfera di centro il punto considerato, tale che tutti i punti interni ad essa appartengano al campo. Se invece esiste una sfera di centro il punto considerato e di cui tutti i punti non appartengono al campo, questo punto si dirà *esterno*. Un punto nè interno nè esterno si dirà *punto limite*. I punti limiti formano un campo, che dicesi *campo limite*, o *contorno* del campo dato.

Dato un campo A, potremo in generale immaginare dei solidi formati da prismi (e che diremo solidi prismatici), i quali contengano nel loro interno A, e dei solidi pure prismatici, interni ad A. Se il limite inferiore dei volumi dei primi solidi coincide col limite superiore dei volumi dei secondi, al loro valore comune si darà il nome di *volume* del campo dato; e si dirà anche che il campo dato ha un volume paragonabile coi volumi di prismi.

Ma se questi volumi non coincidono, chiameremo *volume esterno* del campo il limite inferiore dei volumi dei solidi prismatici contenenti il campo dato, e chiameremo *volume interno* il limite superiore dei volumi contenuti nell'interno di esso campo. Potrebbe avvenire che non esista alcun solido prismatico contenente il campo dato, e allora si dirà che il volume esterno di quel campo è infinito; e se nessun solido è contenuto nel campo, si dirà che il suo volume interno è nullo.

Se da un solido composto di prismi, contenente nel suo interno il campo A, si toglie un solido analogo contenuto in A, si avrà un nuovo solido che contiene i punti limiti di A, e il cui volume è la differenza dei volumi dei due solidi precedenti. Se questa differenza

si può rendere tanto piccola quanto si vuole, il limite inferiore dei primi solidi è eguale al limite superiore dei secondi, e viceversa. Quindi, affinchè un campo abbia un volume paragonabile coi prismatici, è necessario e sufficiente che si possa formare un solido prismatico, il cui volume sia piccolo ad arbitrio, e che contenga nel suo interno il contorno del campo dato.

È noto dalla geometria elementare come si dimostri pei solidi più comuni, come tetraedri e poliedri in generale, sfera, ecc. che il loro volume è paragonabile con quello dei solidi prismatici.

Si osservi poi, sia a proposito dei volumi che delle aree, che se una grandezza a è il limite superiore d'un sistema di grandezze b, e se ogni grandezza b è il limite superiore di certe grandezze c, la grandezza a è pure il limite superiore delle grandezze c; e se a è il limite inferiore d'un sistema di grandezze b, e ogni grandezza b è limite inferiore di altre grandezze c, sarà a il limite inferiore delle c. Quindi, poichè l'area d'un cerchio, o d'una figura limitata da linee rette e da archi circolari, è ad un tempo il limite superiore delle aree dei poligoni interni ad essa, e il limite inferiore delle aree poligonali che la contengono, si deduce che l'area interna d'una figura qualunque è anche il limite superiore di tutte le aree piane contenute in essa, e limitate da linee rette o da archi circolari (o in generale da linee che racchiudono aree paragonabili alle poligonali); lo stesso si può dire per le aree esterne.

Ancora, siccome è facile il vedere che l'area d'un poligono è il limite superiore delle aree di figure interne ad esso, e composte di tanti rettangoli aventi due lati paralleli ad una retta fissa, ed è il limite inferiore delle aree di figure analoghe, che contengono il poligono dato, così si deduce che l'area interna d'un campo qualunque è anche il limite superiore delle aree di figure composte di rettangoli aventi una coppia di lati paralleli ad una retta fissa, e interni al campo dato, e che l'area esterna dello stesso campo è il limite inferiore delle aree di figure analoghe contenenti il campo dato.

Analogamente si può conchiudere che p. e. il volume interno d'un campo qualunque è anche il limite superiore dei volumi di solidi

limitati da piani qualunque, o da superficie sferiche, o cilindriche, o coniche, ecc. (i quali solidi sono più generali di quelli impiegati nella definizione), e che esso è pure il limite superiore dei volumi di solidi formati da tanti prismi retti, le cui altezze siano parallele ad una retta fissa (solidi meno generali di quelli impiegati nella definizione).

6. Ai volumi così definiti potremo estendere alcuni teoremi che si dimostrano in geometria elementare per solidi particolari.

Sia A una figura piana; per ogni punto di A si conduca una retta parallela ad una retta fissa. Il solido formato dall'insieme di queste rette, e compreso fra il piano della figura A ed un suo parallelo, è un prisma se A è un poligono; noi lo chiameremo in generale *cilindro*. Il volume (proprio, o esterno, od interno) di questo cilindro è eguale al volume del prisma avente per base un'area poligonale eguale all'area della figura A (o propria, o esterna, od interna), e compreso fra gli stessi piani paralleli. Infatti si immagini un poliedro interno al cilindro in questione. Se per ogni punto di questo poliedro si conduce la parallela alla generatrice del cilindro, compresa fra le due basi, si otterrà, come luogo di queste rette, un prisma, maggiore o eguale al poliedro dato, e la cui base è un poligono interno ad A. Ma il limite superiore dell'area di questo poligono è l'area interna di A; il limite superiore dei volumi di quei poliedri è il volume interno al cilindro; dunque il volume interno del cilindro è eguale al volume del prisma avente per base l'area interna della base del cilindro, e la stessa altezza. Lo stesso si può dire del volume esterno, e del volume proprio, ove esista.

Se A è una figura piana, e V un punto fuori del piano, il luogo delle rette (terminate) che vanno dal punto V ai punti di A è un solido, che è una piramide, se A è un poligono, e che in generale dicesi *cono*. Si dimostrerà in modo analogo che il volume del cono è il terzo del volume del prisma avente una base eguale in area a quella di A, e la stessa altezza.

Siano A una figura piana, r una retta parallela al piano di A, e π un piano qualunque. Il luogo delle rette parallele al piano π che

passano pei punti di A e incontrano la retta r, queste rette essendo comprese fra il piano A e la retta r, è un solido detto *conoide*. Il suo volume (proprio, o esterno od interno) è eguale alla metà del volume del prisma avente per base un'area eguale all'area di A (propria, o esterna od interna) e per altezza la distanza della retta r dal piano della figura A. La cosa è evidente se la figura A è un parallelogrammo avente due lati paralleli ad r, e gli altri due paralleli all'intersezione dei piani π e A. Lo stesso avviene se la figura A è la somma di più parallelogrammi di tal fatta. Se la figura A è qualunque, si immagini una figura B interna ad A e composta di tanti parallelogrammi della specie descritta, e il conoide di base B. Sarà il limite superiore delle aree B eguale all'area interna di A; il limite superiore dei conoidi di base B eguale al volume interno del conoide di base A; e poichè il conoide di base B vale la metà del prisma di egual base e di eguale altezza, si deduce che il volume interno del conoide di base A è la metà del volume del prisma di base eguale all'area interna di A, e di egual altezza. Lo stesso vale pel volume esterno, e pel volume proprio.

7. Lunghezza di archi curvilinei. Dato un arco continuo AB, lo si decomponga in parti, che siano nuovi archi continui, e si dispongano queste parti l'una dopo l'altra in modo da formare una nuova linea continua. La distanza dei punti estremi di questo nuovo arco dipenderà in generale dal modo con cui si è diviso l'arco AB e dal modo con cui si dispongono queste parti. Al limite superiore di questa distanza (ove esista) daremo il nome di *lunghezza* dell'arco dato. Dire che un arco ha una lunghezza significa che esiste questo limite superiore.

È chiaro che, decomposto l'arco AB in parti, converrà di disporre queste parti in modo che la distanza degli estremi della curva ottenuta sia massima, il che si otterrà facendo in modo che gli estremi di tutti questi archi parziali siano in linea retta; ed allora la distanza fra gli estremi dell'arco così ottenuto è la somma delle corde che sottendono gli archi in cui si è decomposta la linea data. Quindi la lunghezza d'un arco è il limite superiore delle lunghezze delle

linee poligonali i cui estremi sono gli estremi dell'arco, ed i cui vertici sono punti *successivi* dell'arco.

Si deduce immediatamente dalla definizione, che la lunghezza d'un arco, la quale è il limite superiore delle lunghezze delle linee poligonali i cui estremi sono gli estremi dell'arco e i cui vertici sono punti successivi dell'arco, è maggiore delle lunghezze di queste linee poligonali. Come caso particolare, la lunghezza d'un arco (continuo) è maggiore della sua corda.

Teorema. Se mentre un punto P percorre una linea AB da A in B, le sue tre proiezioni P' P'' P''' fatte su tre assi Ox Oy Oz, ogni proiezione essendo fatta parallelamente al piano degli altri due assi, percorrono rispettivamente i segmenti $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ sempre muovendosi nello stesso senso, la lunghezza dell'arco AB è minore della somma delle lunghezze delle sue proiezioni $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$.

La cosa è evidente se la linea AB è retta, perchè essendo il segmento AB equipollente alla risultante dei segmenti $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, sarà $gr\,AB < gr\,A'B' + gr\,A''B'' + gr\,A'''B'''$.

Se la linea è una spezzata ACDB, sarà $gr AC < gr A'C' + gr A''C'' + gr A'''C'''$; $gr\,CD < gr\,C'D' + gr\,C''D'' + C'''D'''$; $gr\,DB < gr\,D'B' + gr\,D''B'' + gr\,D'''B'''$; quindi sommando, ed osservando che $gr\,A'C' + gr C'D' + gr\,D'B' = gr\,A'B'$, e formule analoghe, si deduce che la lunghezza della spezzata è minore della somma delle lunghezze delle sue tre proiezioni.

Se la linea è qualunque, si immagini una spezzata, i cui estremi siano A e B, e i cui vertici siano punti successivi dell'arco. La sua lunghezza sarà minore di $gr\,A'B' + gr\,A''B'' + gr\,A'''B'''$; e poichè il limite superiore della lunghezza di questa spezzata è la lunghezza dell'arco, si deduce che la lunghezza dell'arco è minore della somma delle sue proiezioni.

Teorema. Se un arco curvilineo ha in un suo punto P la tangente, e se questa è il limite della retta che con-

giunge due punti qualunque della curva, quando questi tendano a P, il rapporto d'un arco della curva alla sua corda, ove gli estremi di questo arco tendano a P, ha per limite l'unità.

Infatti, si determini un arco QR nelle vicinanze di P, in modo che ogni retta che unisce due punti di quest'arco faccia colla tangente in P un angolo minore d'un angolo ϵ fissato piccolo ad arbitrio. Sia c la corda dell'arco QR; si decomponga quest'arco in parti, le cui corde siano $c_1\, c_2 \ldots c_n$. Si proiettino queste corde sulla corda QR; detti $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gli angoli che esse fanno con questa retta, sarà

$$c = c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 + \ldots + c_n \cos\alpha_n.$$

Ora, poichè gli angoli che le corde $c\; c_1\; c_2 \ldots c_n$ fanno colla tangente in P sono minori di ϵ, gli angoli $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ saranno minori di 2ϵ; quindi si deduce

$$c < c_1 + c_2 + \ldots + c_n, \quad c > (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \cos 2\epsilon;$$

ovvero, dividendo l'ultima per $\cos 2\epsilon$ (supposto $2\epsilon < \frac{\pi}{2}$)

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n < \frac{c}{\cos 2\epsilon}.$$

Perciò la lunghezza s dell'arco QR, che è il limite superiore della somma $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ soddisferà pure alle stesse diseguaglianze $c < s$, $c > s \cos 2\epsilon$; ossia $\frac{c}{s} < 1$, e $\frac{c}{s} > \cos 2\epsilon$. E poichè l'angolo ϵ si può prendere piccolo ad arbitrio, col prendere gli estremi dell'arco sufficientemente prossimi a P, si conchiude $\lim \frac{c}{s} = 1$, c. v. d.

Sarà utile il ricordare a questo proposito la proposizione a pag. 59: « Se il punto P è funzione della variabile t, ed ha derivata prima continua e non nulla, la tangente alla curva descritta da P è anche il limite della congiungente due punti qualunque della curva, quando questi tendano a P ».

8. Aree di superficie non piane. Abbiasi una superficie qualunque. Proiettandola ortogonalmente sopra un piano avremo una figura piana; supporremo che questo abbia un'area propria, e chè la superficie data si possa decomporre in parti che godano della stessa proprietà.

Si scomponga la superficie data in parti e, dopo averle trasportate comunque nello spazio, si proiettino queste ortogonalmente su d'uno stesso piano. La somma delle aree di queste proiezioni sarà un'area piana, variabile col variare del modo di divisione della superficie e del modo con cui si dispongono queste parti. Il limite superiore dei valori di quest'area piana si dirà l'*area* della superficie data.

Si deduce immediatamente dalla definizione che l'area d'una superficie qualunque è maggiore della sua proiezione ortogonale su d'un piano qualunque.

§ 2. Funzioni distributive d'un campo.

9. Se un campo A è decomposto in parti A_1, A_2, ... A_n esso si dirà *somma* delle sue parti, e si scriverà

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Un campo dicesi *chiuso*, se tutti i punti limiti del campo appartengono ad esso.

Un campo dicesi *finito*, se la distanza d'ogni punto del campo da un punto fisso non può superare una certa grandezza finita. È chiaro che se un campo è finito, si potrà determinare un parallelepipedo nel cui interno si trovino tutti i punti del campo proposto.

Fra le proprietà, o qualità, che possono avere i campi, alcune sono tali che se un campo ha una di esse, decomponendolo in più parti, una almeno di queste parti ha la stessa proprietà. Così se il campo ha la proprietà di contenere infiniti punti, decomponendolo in parti, una almeno di queste parti dovrà avere la stessa

proprietà di contenere infiniti punti. Ci sarà utile la proposizione che segue:

Teorema. Se q è una qualità che possono avere dei campi, tale che se un campo ha la proprietà q, decomponendolo in parti, una almeno di queste parti abbia la qualità q, allora, se un campo finito A ha la proprietà q, esiste un punto P (appartenente o al campo dato o al suo campo limite) tale che, fissata ad arbitrio una lunghezza r, si può sempre determinare un campo, parte di A, i cui punti distano da P meno di r, e il quale ha pure la qualità q.

Invero, riferiti i punti del campo a tre assi cartesiani, e dette $x\ y\ z$ le coordinate d'un punto, poichè il campo è finito, i valori di queste coordinate sono compresi entro limiti finiti, che diremo (a, a'), (b, b') (c, c'); il campo proposto sarà compreso entro il parallelepipedo formato dai piani di equazioni $x = a$, $x = a'$; $y = b$, $y = b'$; $z = c$, $z = c'$. Si dividano gli spigoli del parallelepipedo in n parti eguali, e pei punti di divisione si conducano i piani paralleli alle faccie di esso. Si avrà decomposto il parallelepipedo dato in n^3 nuovi parallelepipedi, i cui spigoli sono l'n^{ma} parte degli spigoli del primo; e il campo dato risulterà pure decomposto in parti, il cui numero sarà o n^3, o minore di n^3 (il che avviene quando alcuno di questi parallelepipedi non contenga alcun punto del campo). Quindi, in virtù delle ipotesi fatte, una almeno di queste parti gode della proprietà q; il campo parziale, che ha la proprietà q, sia quello compreso nel parallelepipedo, i cui piani hanno per equazioni $x = a_1$, $x = a'_1$; $y = b_1$, $y = b'_1$; $z = c_1$, $z = c'_1$; sarà $a_1 \geq a$, $a'_1 \leq a'$; $b_1 \geq b$, $b'_1 \leq b'$; $c_1 \leq c$, $c'_1 \geq c$; e $a'_1 - a_1 = \frac{1}{n}(a' - a)$, $b_1' - b_1 = \frac{1}{n}(b' - b)$, $c'_1 - c_1 = \frac{1}{n}(c' - c)$. Si operi su questo nuovo campo come si è operato sul proposto; si troverà un nuovo campo avente pure la proprietà q, e in cui le coordinate dei punti sono comprese fra a_2, a'_2; b_2, b'_2; c_2, c'_2; e così via.

Le quantità a, a_1, a_2, ..., quando variano, vanno crescendo, e le

a', a'_1, a'_2 ... vanno decrescendo; e poichè le differenze $a' - a$, $a'_1 - a_1$, $a'_2 - a_2$, ... vanno diminuendo indefinitamente, esse tendono verso un limite x_0; analogamente le quantità b, b_1, b_2, ... e b', b'_1, b'_2 ... tendono ad uno stesso limite y_0, e le c, c_1, c_2, ... e c', c'_1, c'_2, ... verso z_0. Dico che il punto P di coordinate x_0, y_0, z_0 gode della proprietà enunciata. Invero, fissato ad arbitrio r, si determini n così grande che tutti i punti le cui coordinate sono comprese fra a_n, a'_n; b_n, b'_n; c_n, c'_n, distino da P meno di r (per il che basta prendere n in guisa che le differenze $x_0 - a_n$, $a'_n - x_0$; $y_0 - b_n$, $b'_n - y_0$, $z_0 - c_n$, $c'_n - z_0$, che hanno per limiti zero, siano minori di $\frac{1}{3} r$). Allora i punti del campo proposto, le coordinate dei quali sono compresi negli stessi intervalli, distano da P meno di r, e formano un campo avente la proprietà q.

Corollarii — 1° Se il campo finito A ha infiniti punti, esiste un punto P tale che, fissato ad arbitrio r, si può determinare un campo, parte di A, i cui punti distano da P meno di r, e che ha pure infiniti punti.

2° Se U è una grandezza funzione della posizione d'un punto P, e se l è il limite superiore dei valori di U corrispondenti ai punti d'un campo finito A, esiste un punto P tale che, fissato ad arbitrio r, si può determinare un campo, parte di A, i cui punti distano da P meno di r, e che il limite superiore dei valori di U corrispondenti ai punti di questo campo è ancora l.

3° Se U è una grandezza funzione continua della posizione del punto P, data in un campo finito e chiuso, essa assume in questo campo il suo massimo ed il suo minimo valore.

4° Se tutti i punti del campo finito e chiuso A sono interni al campo B, si può determinare una lunghezza r in guisa che ogni punto, che disti da qualche punto di A meno di r, appartenga a B.

10. Una grandezza dicesi *funzione* d'un campo, se ad ogni campo, o assolutamente arbitrario o obbligato a certe condizioni, corrisponde un valore di quella grandezza.

Una grandezza dicesi *funzione distributiva* d'un campo, se il valore di quella grandezza corrispondente ad un campo è la somma dei valori di essa corrispondenti alle parti in cui si può decomporre il campo dato.

Called linear function in the Formulaire V3 p. 139.

Così, se i campi che si considerano sono segmenti d'una retta, o archi d'una linea, la loro lunghezza è una funzione distributiva, perchè la lunghezza d'un arco è la somma delle lunghezze delle sue parti. Se i campi che si considerano sono figure piane aventi aree proprie, l'area d'un campo è funzione distributiva, perchè l'area d'una figura è la somma delle aree delle sue parti; e così via per le aree di superficie qualunque, e pei volumi.

La lunghezza del campo comune ad un campo variabile e ad una retta fissa è funzione distributiva di quel campo; l'area del cono che proietta da un punto fisso un arco variabile è funzione distributiva di quest'arco, ecc. Se i campi che si considerano sono corpi materiali, la massa d'un corpo è una grandezza fisica funzione distributiva di esso, perchè la massa d'un corpo è la somma delle masse delle sue parti.

Ma il quadrato della lunghezza d'un arco non è funzione distributiva di esso, poichè questo quadrato è minore della somma dei quadrati delle lunghezze delle parti dell'arco.

Due funzioni distributive d'uno stesso campo diconsi anche, con Cauchy, *coesistenti*. La ragione di questo nome si è che, quando l'una si annulla, in generale si annulla pure l'altra.

11. Ad un campo variabile si possono far corrispondere, oltrechè grandezze, anche altri enti; e se questi sono sommabili, come avviene se sono segmenti, o campi, si potrà estendere loro la definizione di funzione distributiva.

Indicheremo con segni (lettere) le funzioni distributive. Così con *gr*A intenderemo la grandezza del campo A, cioè la sua lunghezza, o area, o volume, a seconda del numero delle sue dimensioni. Sia α il simbolo d'una funzione (o operazione) distributiva, e $\alpha(A)$, ovvero, più semplicemente, αA il valore di questa funzione corrispondente al campo A. La proprietà distributiva è indicata dalla

formola

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

ove A e B sono campi.

Se α e β sono i segni di due operazioni distributive, e se αA e βA sono sommabili (il che avviene se sono numeri, o grandezze omogenee, o campi, o segmenti, ecc.) ad ogni campo A si può far corrispondere il valore $\alpha A + \beta A$, che indicheremo anche con $(\alpha + \beta)A$. L'operazione indicata col simbolo $\alpha + \beta$ è pure distributiva. Invero si ha, per definizione $(\alpha + \beta)(A + B) = \alpha(A + B) + \beta(A + B)$; e poichè α e β sono operazioni distributive,

$$(\alpha + \beta)(A + B) = \alpha A + \alpha B + \beta A + \beta B$$
$$= (\alpha + \beta)A + (\alpha + \beta)B,$$

il che dimostra la proprietà distributiva dell'operazione $\alpha + \beta$.

Il prodotto di αA per un numero m, che indicheremo con $m\alpha A$, è pure funzione distributiva, poichè

$$m\alpha(A + B) = m(\alpha A + \alpha B) = m\alpha A + m\alpha B.$$

Se α è il simbolo d'una operazione distributiva d'un campo A, e β è il simbolo d'una nuova operazione distributiva eseguibile su αA, sarà $\beta\alpha A$ pure funzione distributiva. Invero si ha $\beta\alpha(A + B) = \beta(\alpha A + \alpha B)$, a causa della proprietà distributiva di α, e $= \beta\alpha A + \beta\alpha B$, a causa della proprietà distributiva di β, il che dimostra la proprietà distributiva dell'operazione $\beta\alpha$.

Si osservi che se x è un numero, ed $y = f(x)$ è una funzione numerica continua di x avente la proprietà distributiva, ossia tale che $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, allora $f(x)$ è il prodotto di x per un numero costante a (V. Calcolo, pag. 28, 9°).

12. Sia $x = x(A)$ una grandezza, funzione distributiva del campo A. Supporremo che ad ogni campo che si considera corrisponda sempre un valore di x positivo e mai nullo; questo avverrà se si fa p. e. $x(A) = grA$, e si considerano solamente quei campi la cui grandezza non è nulla.

Sia $y = y(A)$ una seconda funzione distributiva del campo A; sicchè x e y sono grandezze coesistenti. Preso un campo qualunque nelle vicinanze d'un punto P, siano Δy e Δx i valori corrispondenti di y ed x, e si immagini il loro rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ col che intenderemo o il rapporto delle due grandezze, se esse sono omogenee, ovvero il rapporto dei numeri che le misurano.

Diremo che, in un punto P, il rapporto delle due funzioni distributive y ed x d'un campo vale ρ, se ρ è il limite verso cui tende il rapporto dei valori di queste funzioni, corrispondenti ad un campo di cui tutti i punti si avvicinano indefinitamente a P.

Indicheremo alcune volte che ρ è il rapporto delle funzioni y ed x nel punto P colla notazione, analoga a quella delle derivate, $\rho = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P$, ovvero anche $\rho = \frac{dy}{dx}$, o $dy = \rho dx$. Se ρ è il rapporto di y ed x nel punto P, diremo anche che, in questo punto, la funzione y è eguale alla funzione x moltiplicata per ρ. Il numero ρ varierà in generale col variare del punto P, e sarà una funzione della posizione di P.

Vedremo fra breve molti esempi di questi rapporti. Per ora ci limiteremo al seguente. Se i campi che si considerano sono corpi materiali, x è il loro volume, e y la loro massa, il rapporto della massa al volume d'un campo dicesi la densità media di esso. Se questo rapporto è costante, quel corpo è omogeneo; se variabile, esso è eterogeneo, e dicesi appunto densità del corpo in un suo punto il limite del rapporto della massa al volume d'un campo di cui tutti i punti si avvicinano al dato, ossia il rapporto $\frac{dy}{dx}$ in quel punto.

È chiaro che se, nel punto P, il rapporto di y ad x ha un valore ρ, non nullo, il rapporto di x ad y vale $\frac{1}{\rho}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}};$$

se i rapporti delle funzioni y e z alla x valgono ρ e σ, il rapporto di $y \pm z$ alla x vale $\rho \pm \sigma$:

$$\frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx};$$

se il rapporto di z ad y vale ρ, e quello di y ad x vale σ, il rapporto di z ad x vale $\rho\sigma$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx};$$

se $\frac{dy}{dx} = \rho$, ed m è un numero costante, sarà $\frac{dmy}{dx} = m\rho$, ossia:

$$\frac{dmy}{dx} = m\frac{dy}{dx}.$$

13. Teorema. Se il rapporto ρ delle funzioni distributive y ed x in ogni punto d'un campo finito e chiuso S è minore d'un numero M, e maggiore di m, anche il rapporto dei valori di y ed x corrispondenti ad un campo A, parte di S, sarà compreso fra M ed m:

$$m < \frac{y(\mathrm{A})}{x(\mathrm{A})} < \mathrm{M}.$$

Infatti, pongasi per assurdo che sia $\frac{y(\mathrm{A})}{x(\mathrm{A})} > \mathrm{M}$, ossia $y(\mathrm{A}) > \mathrm{M}x(\mathrm{A})$. Si divida il campo A in parti $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$. Corrispondentemente ad una di queste parti dovrà essere il rapporto dei valori delle y e x maggiore di M, poichè se fosse $y(\mathrm{A}_1) < \mathrm{M}x(\mathrm{A}_1)$ e $y(\mathrm{A}_2) < \mathrm{M}x(\mathrm{A}_2)$, sommando si ricaverebbe $y(\mathrm{A}_1) + y(\mathrm{A}_2) < \mathrm{M}[x(\mathrm{A}_1) + x(\mathrm{A}_2)]$, ovvero $y(\mathrm{A}) < \mathrm{M}x(\mathrm{A})$, il che è contrario all'ipotesi fatta. Dunque la proprietà d'un campo A d'essere $\frac{y(\mathrm{A})}{x(\mathrm{A})} > \mathrm{M}$ è tale che, se A ha questa proprietà, dividendolo in parti, una di queste ha la stessa proprietà. Pertanto in virtù del teorema del N. 9, esisterà un punto P tale che, fissata ad arbitrio una lunghezza r, si può determinare un

campo ΔA in modo che i suoi punti distino da P meno di r, e pel quale $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)} > M$. Ora questo è assurdo, poichè, siccome $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)}$ tende ad un limite $\rho < M$, si può determinare una lunghezza r in guisa che, per ogni campo ΔA i cui punti distano da P meno di r, sia $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)} < M$. Dunque non può essere il rapporto $\frac{y(A)}{x(A)}$ maggiore di M.

Nello stesso modo si dimostra che questo rapporto non può essere minore di m, e così si conchiude che esso è compreso fra M ed m.

Corollario I. Se il rapporto ρ delle due funzioni distributive y e x è costante in ogni punto del campo S, anche il rapporto dei valori di y ed x corrispondenti ad un campo qualunque A, parte di S, è eguale a quel valore costante di ρ.

Infatti, il rapporto $\frac{y(A)}{x(A)}$ è minore d'ogni numero maggiore di ρ, e maggiore d'ogni numero minore di ρ; dunque esso vale ρ.

Corollario II. Se il rapporto di y ed x è in ogni punto di S nullo, sarà sempre nullo il valore di y corrispondente ad un campo qualunque parte di S.

Corollario III. Se i rapporti delle funzioni y e z alla x sono eguali in ogni punto, i valori di queste funzioni corrispondenti ad un campo qualunque sono pure eguali.

Basterà applicare il corollario precedente alla funzione $z - y$.

14. Teorema. Il rapporto $\rho = \frac{dy}{dx}$ delle due grandezze coesistenti y e x, in un punto, è funzione continua del punto.

Invero, sia P un punto del campo, e sia $\rho(P)$ il valore corrispondente di ρ. Fissato ad arbitrio un numero ϵ, si potrà determinare una lunghezza r in guisa che, preso un campo qualunque ΔA i cui punti distino da P meno di r, il rapporto $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)}$ dei valori corri-

spondenti di y ed x differisca dal suo limite meno di ϵ, cioè sia compreso fra $\rho + \epsilon$ e $\rho - \epsilon$.

Sia ora P′ un punto che dista da P meno di r, e sia $r' < r - gr\text{PP}'$. Sia ΔA un campo di punti che distano da P′ meno di r'; questi punti disteranno da P meno di r, e perciò sarà $\frac{y(\Delta\text{A})}{x(\Delta\text{A})}$ compreso fra $\rho + \epsilon$ e $\rho - \epsilon$.

Ma, col tendere di r' a zero, il rapporto $\frac{y(\Delta\text{A})}{x(\Delta\text{A})}$ tende verso il limite $\rho(\text{P}') = \rho'$; e poichè quel rapporto è compreso fra $\rho + \epsilon$ e $\rho - \epsilon$, anche il suo limite ρ' sarà compreso entro le stesse quantità, e quindi la differenza $\rho' - \rho$ è minore di ϵ. Pertanto, fissato piccolo ad arbitrio un numero ϵ, si potè determinare una lunghezza r tale che il valore di ρ corrispondente ad un punto qualunque P′, che dista dal punto fisso P meno di r, differisca dal valore di ρ corrispondente al punto P meno di ϵ; quindi ρ è funzione continua del punto P.

§ 3. Applicazioni.

15. Ecco alcune applicazioni delle proposizioni che precedono.

Se, in un piano fisso, da ogni punto M d'una retta AB, si conducono, normalmente ad AB, e sempre da una stessa parte di essa, due rette MN e MP, la prima costante in lunghezza, e l'altra la cui lunghezza, variabile con M, sia funzione continua di M; allora, se M percorre un segmento su AB, la retta MN genera un rettangolo di area Δx, e la retta MP genera una figura, di area (esterna od interna) Δy; Δx e Δy saranno evidentemente funzioni distributive del campo descritto da M. Dico che, per ogni posizione di M, il rapporto fra le due aree descritte da MP e MN, ossia il limite del rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ove tutti i punti del campo descritto da M si avvicinino ad un punto fisso, vale il rapporto delle lunghezze delle

rette MP e MN che descrivono queste aree:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}.$$

Infatti, sia Δc il campo, parte di AB, descritto di M. Dette l_1 e l_2 due lunghezze, la prima minore e l'altra maggiore delle lunghezze di MP corrispondenti ai punti del campo Δc, sarà il rettangolo di base Δc e di altezza l_1 parte della figura descritta da MP, e quindi la sua area minore di Δy; ma questa figura descritta da MP è parte del rettangolo di base Δc, e di altezza l_2, e quindi l'area Δy è minore dell'area di questo rettangolo.

Ora i rapporti delle aree dei rettangoli di basi Δc e di altezze l_1 e l_2 all'area Δx, che è pure un rettangolo di base Δc, e di altezza MN, sono eguali ai rapporti delle altezze $\frac{l_1}{\mathrm{MN}}$ e $\frac{l_2}{\mathrm{MN}}$. Quindi sarà anche

$$\frac{l_1}{\mathrm{MN}} < \frac{\Delta y}{\Delta x} < \frac{l_2}{\mathrm{MN}}.$$

E siccome la lunghezza della retta MP è funzione continua di M, potremo supporre i punti del campo Δc così prossimi ad M che le lunghezze l_1 ed l_2, le quali comprendono le lunghezze delle perpendicolari MP nei punti di Δc, differiscano da quella corrispondente al punto considerato M tanto poco quanto si vuole; quindi anche $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differirà da $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}$ tanto poco quanto si vuole, ossia

$$lim\, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}.$$

Da questa proposizione possiamo dedurre alcune conseguenze.

a) Se, nel piano fisso, da ogni punto M della retta terminata AB si conduce una retta MP, normale ad AB, rivolta sempre dalla stessa parte di AB, e la cui lunghezza, variabile con M, sia funzione continua di M, la figura descritta da MP, mentre M percorre

il segmento AB, o una sua parte qualunque, ha un'area propria, ossia il limite superiore delle aree dei poligoni interni ad essa è eguale al limite inferiore delle aree dei poligoni che la contengono nel suo interno. Invero, nelle ipotesi fatte, l'area esterna e l'area interna hanno, in ogni punto M di AB, coll'area Δx rapporti eguali, e quindi sono eguali.

b) Se, nel piano fisso, da ogni punto M della retta AB si conducono normalmente ad AB due rette MN ed MP, variabili amendue in lunghezza, e funzioni continue di M, il rapporto delle aree descritte dalle due rette sarà, in ogni punto M, eguale al rapporto delle lunghezze delle rette mobili.

c) Se, nel piano fisso, da ogni punto M di AB si conducono, normalmente ad AB, una retta MN funzione continua di M, ed una seconda retta MP tale che il rapporto $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}$ sia costante, anche le aree descritte da MP e MN, mentre M percorre un campo qualunque, hanno fra loro questo rapporto costante.

d) Se, nel piano, da ogni punto M di AB si conducono, normalmente ad AB, due rette MN, MP, le cui lunghezze variino continuamente con M, ed una terza retta MQ eguale in lunghezza alla somma, o differenza, delle MN e MP, anche l'area descritta da MQ è la somma, o differenza, delle aree descritte da MN e MP.

e) Cambiando lettere, e detto u il numero che misura l'area descritta da MP, x il numero che misura la lunghezza del campo descritto da M, e y la lunghezza variabile MP, supposto ancora di prendere la lunghezza costante MN per unità di misura, la formula precedente si può scrivere

$$\frac{du}{dx} = y, \text{ ovvero } du = y dx.$$

16. In modo analogo al precedente si dimostrano queste altre proposizioni:

1° Se, in un piano fisso, da ogni punto M d'una retta AB, si conducono, parallelamente ad una retta data OY, due rette MN e MP, la prima costante in lunghezza, e l'altra variabile continuamente

con M, il rapporto fra l'area descritta dalla retta MP, all'area descritta da MN, è eguale al rapporto delle rette MP e MN che le descrivono.

Detto u il numero che misura l'area descritta da MP, x il numero che misura il campo descritto da M, e ω l'angolo della retta AB colla OY, il rapporto fra l'area p del parallelogrammo descritto da MN e la lunghezza del campo descritto da M vale MN$sen\omega$; quindi

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{\text{MP}}{\text{MN}}\,\text{MN}sen\omega = \text{MP}sen\omega,$$

ovvero, anche, chiamando y la lunghezza di MP:

$$\frac{du}{dx} = y\,\text{sen}\,\omega, \quad du = y\,\text{sen}\,\omega\,dx.$$

2° Se da ogni punto M d'una figura piana fissa si conducono, normalmente a questo piano, e sempre da una stessa parte, due rette MN e MP, la prima costante in lunghezza, e la seconda variabile continuamente con M, il rapporto tra i volumi descritti dalle rette MP e MN, mentre il punto M descrive nel piano un campo parte della figura data, vale, in ogni punto M, il rapporto delle rette MP e MN che li descrivono. Detto v il volume descritto da MP, e v' quello descritto da MN, sarà quindi $\frac{dv}{dv'} = \frac{\text{MP}}{\text{MN}}$.

Se supponiamo che dv e dv' siano i numeri che misurano questi volumi, detto ω il numero che misura l'area piana descritta da M, il volume del cilindro v' è eguale all'area base ω moltiplicata per l'altezza MN; quindi $dv' = \text{MN}d\omega$; sostituendo si ricava $dv = \text{MP}d\omega$, ovvero anche, fatto $\text{MP} = z$:

$$dv = zd\omega.$$

3° Se da ogni punto M d'un arco di cerchio AB si conduce il raggio OM, e si porta su esso a partire dal centro O un segmento OP la

cui lunghezza, variabile con M, sia funzione continua della posizione di M sull'arco, se M descrive un arco, parte di AB, il raggio OM descriverà un settore circolare, e la retta OP una figura piana (un settore curvilineo); le aree descritte da OM e da OP sono funzioni distributive dell'arco descritto da M, ossia sono grandezze coesistenti. Dico che, per ogni posizione del punto M, il rapporto fra le aree descritte da OP e da OM è eguale al quadrato del rapporto delle lunghezze OP e OM.

Infatti, siano OP_1 e OP_2 due rette, aventi la direzione della retta mobile OM, e le cui lunghezze, fisse, comprendano i valori che assume la lunghezza di OP mentre M varia nel campo Δc. Le rette OP_1 e OP_2 descrivono due settori circolari, che comprendono l'area descritta da OP. Quindi sarà area $OP_1 <$ area OP $<$ area OP_2.

Ora le aree descritte da OP_1 e da OP_2 sono settori circolari, simili all'area descritta da OM; quindi esse stanno come i quadrati dei lati omologhi $\frac{\overline{OP_1}^2}{\overline{OM}^2}$ e $\frac{\overline{OP_2}^2}{\overline{OM}^2}$; perciò

$$\frac{\overline{OP_1}^2}{\overline{OM}^2} < \frac{\text{area OP}}{\text{area OM}} < \frac{\overline{OP_2}^2}{\overline{OM}^2}.$$

Se ora tutti i punti del campo descritto da M si avvicinano ad uno stesso punto M, le lunghezze OP_1 e OP_2, che comprendono i valori di OP, si possono rendere tanto prossime quanto si vuole al valore di OP corrispondente al punto M. Quindi il rapporto $\frac{\text{area OP}}{\text{area OM}}$ si può far differire di tanto poco quanto si vuole da $\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}$, e

$$lim \frac{\text{area OP}}{\text{area OM}} = \frac{d \text{ area OP}}{d \text{ area OM}} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}.$$

Se indichiamo con u il numero che misura l'area descritta da OP e con α la lunghezza dell'arco descritto da OM, supposto che la lunghezza costante OM sia eguale all'unità di misura, si avrà

area OM $=\frac{1}{2}\alpha$, d area OM $=\frac{1}{2}d\alpha$, e quindi, fatto ancora OP $=r$:

$$du=\frac{1}{2}r\,d\alpha.$$

4° Se da ogni punto M d'una sfera si conduce il raggio OM, e su esso si porta a partire dal centro un segmento OP la cui lunghezza varii con M, essendo però funzione continua di M; allora se M descrive un campo sulla sfera, i volumi descritti da OM e da OP sono grandezze coesistenti, ed il loro rapporto è, in ogni punto M, eguale al cubo del rapporto delle lunghezze delle rette che li descrivono.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Preso per unità di misura il raggio della sfera (OM $=1$), detto v il volume descritto da OP, ω l'area sferica descritta da M, e r la lunghezza di OP, si avrà $vol\mathrm{OM}=\frac{1}{3}\omega$, $d\,vol\mathrm{OM}=\frac{1}{3}d\omega$; quindi, sostituendo in

$$\frac{d\,vol\mathrm{OP}}{d\,vol\mathrm{OM}}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^3}{\overline{\mathrm{OM}}^3},$$

si ricava

$$dv=\frac{1}{3}r^3\,d\omega.$$

17. Sia, nello spazio, OX un asse fisso, P un prisma indefinito, avente le generatrici parallele ad OX, ed F una figura solida finita.

Per ogni punto M di OX conducasi il piano π normale a questo asse; esso incontrerà il prisma P secondo un poligono p, ed il solido F secondo una figura piana f. Se M percorre un segmento su OX, il poligono p descrive un prisma finito, parte di P, e la figura f un solido, parte di F. I solidi descritti da p e da f sono funzioni distributive del campo percorso da M. Dico che se, per una posizione speciale di M, il piano π incontra il campo limite di F secondo una figura piana la quale si possa racchiudere con linee poligonali che comprendano un'area tanto piccola quanto si vuole

(ossia, se l'area esterna dell'intersezione di Π col campo limite di F è nulla), allora il rapporto dei solidi descritti dalle figure f e p è eguale, nel punto M, al rapporto delle aree delle due figure f e p che descrivono quei solidi.

Infatti, poichè la figura F è finita, potremo immaginare un solido poliedrico S, p. e. un prisma avente le generatrici parallele ad OX, che contenga nel suo interno F. Facciasi $S = F + F'$, ossia chiamisi F' il campo formato dai punti di S non appartenenti ad F; e sia L il campo limite di F. Il piano Π incontri le figure solide S, F, F', L secondo le figure piane s, f, f', l; sarà $s = f + f'$. Sia ϵ un'area piccola ad arbitrio; in virtù delle ipotesi fatte, potremo formare un campo piano c, limitato da linee rette, che comprenda nel suo interno il campo l, e la cui area sia minore di ϵ.

I punti del campo c appartenenti ad f formano un campo che diremo c_1, e quelli appartenenti ad f' un campo c_2, sicchè $c = c_1 + c_2$. Se da f si sottrae c_1 si avrà un poligono q interno ad f, e quindi anche ad F; e se da f' si sottrae c_2 si avrà un poligono q' interno ad F'. Quindi, in sostanza, il poligono s è decomposto in quattro parti $s = q + c_1 + c_2 + q'$; $q + c_1 = f$, $c_2 + q' = f'$, $c_1 + c_2 = c$; $q + c$ è un poligono contenente f, e $c + q'$ è un poligono contenente f'.

Si immaginino ancora i prismi indefiniti aventi per basi i poligoni q, c, q', che diremo Q, C, Q'.

Poichè tutti i punti del poligono q sono interni ad F, potremo determinare una lunghezza r_1 in guisa che ogni punto distante da qualche punto di q meno di r_1, appartenga ad F (N. 9, 4°). Per la stessa ragione, potremo determinare una lunghezza r_2 in guisa che ogni punto distante da qualche punto di q' meno di r_2 appartenga ad F'. Sia r la più piccola delle lunghezze r_1 e r_2.

Preso su OX un segmento ad arbitrio, di cui tutti i punti distino dal punto considerato M meno di r, siano ΔF, $\Delta F'$, ΔP, ΔS, ΔQ, $\Delta Q'$, ΔC i solidi descritti da f, f', p, s, q, q', c mentre M percorre quel segmento. Ogni punto di ΔQ dista dalla sua proiezione su q meno di r; quindi ogni punto ΔQ appartiene a ΔF. Per la stessa ragione, tutti i punti di $\Delta Q'$ appartengono alla $\Delta F'$. Il campo ΔC

si può scomporre in due parti, l'una formata dai punti appartenenti a ΔF, e che diremo ΔC_1, e l'altra, ΔC_2, formata dai punti appartenenti a $\Delta F'$. Quindi si avrà $\Delta S = \Delta Q + \Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta Q'$; $\Delta Q + \Delta C_1 = \Delta F$, $\Delta C_2 + \Delta Q' = \Delta F'$, $\Delta C = \Delta C_1 + \Delta C_2$.

Pertanto la figura ΔF comprende il prisma ΔQ, ed è compresa nel prisma $\Delta Q + \Delta C$, e il suo volume (esterno od interno) è compreso fra i volumi di ΔQ e di $\Delta Q + \Delta C$. Ora, poichè i volumi di due prismi aventi le stesse altezze stanno come le basi, si ha:

$$\frac{\text{vol}\,\Delta Q}{\text{vol}\,\Delta P} = \frac{\text{area}\,q}{\text{area}\,p}, \quad \frac{\text{vol}\,\Delta Q + \text{vol}\,\Delta C}{\text{vol}\,\Delta P} = \frac{\text{area}\,q + \text{area}\,c}{\text{area}\,p};$$

quindi

$$\frac{\text{area}\,q}{\text{area}\,p} < \frac{\text{vol}\,\Delta F}{\text{vol}\,\Delta P} < \frac{\text{area}\,q + \text{area}\,c}{\text{area}\,p}.$$

Ma si ha pure area $q <$ area $f <$ area $q +$ area c; quindi $\frac{\text{vol}\,\Delta F}{\text{vol}\,\Delta P}$ differisce da $\frac{\text{area}\,f}{\text{area}\,p}$ meno di $\frac{\text{area}\,c}{\text{area}\,p}$; e poichè l'area di c si può supporre piccola ad arbitrio, si conchiude

$$lim \frac{\text{vol}\,\Delta F}{\text{vol}\,\Delta P} = \frac{\text{area}\,f}{\text{area}\,p}.$$

Se indichiamo con v il numero che misura il volume di F, e supponiamo che il poligono p, base del prisma P, sia il quadrato costrutto sull'unità di lunghezza, detta x la lunghezza del cammino descritto da M, e fatto $\omega = \text{area}\,f$, il numero che misura il volume ΔP è Δx; quindi $lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = \omega$, ossia $dv = \omega dx$.

Ecco alcune conseguenze della proposizione che precede:

a) Se ogni piano π incontra il campo limite di F secondo una figura piana di area nulla, allora i rapporti dei volumi esterno ed interno della figura descritta da f al volume descritto da p, sono eguali in ogni punto M di OX; quindi i volumi esterno ed interno della figura descritta da F mentre M percorre un segmento finito qualunque, sono eguali, e quella figura ha un volume proprio.

b) Se F e G sono due solidi, e per ogni punto M di OX si conduce il piano Π normale ad OX, che incontri i solidi secondo le figure piane *f* e *g*, supposto sempre che le aree delle figure intersezioni di Π coi campi limiti di F e G siano nulle, il rapporto fra i volumi descritti da *f* e *g*, mentre M varia su OX, vale, in ogni posizione di M, il rapporto delle aree delle figure piane *f* e *g*.

c) Se ogni piano Π normale all'asse OX in un suo punto qualunque M incontra i due solidi F e G secondo due figure piane eguali in area, i volumi dei due solidi, compresi fra due piani Π qualunque sono eguali.

d) Se ogni piano Π incontra i tre solidi F G H secondo figure piane tali che la somma, o differenza, delle prime due sia eguale alla terza, la somma, o differenza, dei volumi dei due primi solidi è eguale al volume del terzo.

18. Si dimostrano allo stesso modo, e con maggior facilità, queste altre proposizioni:

1° Sia F una figura piana, e nel suo piano sia segnato un asse OX. Conducasi per ogni punto M di OX la normale a questo asse, la quale incontrerà la figura F secondo un campo rettilineo *f;* si porti su questa normale, a partire da M, un segmento *k* di lunghezza costante. Se, per una posizione speciale di M, la normale ad OX incontra il campo limite di F secondo un campo lineare di lunghezza esterna nulla, allora il rapporto dell'area descritta dalla figura *f*, mentre M percorre un segmento di OX, all'area descritta contemporaneamente da *k*, è eguale, nel punto M, al rapporto delle lunghezze di *f* e di *k* che descrivono quelle aree.

2° Sia F un solido qualunque e π un piano. Per ogni punto M di π conducasi la normale a π, che incontrerà F secondo una figura rettilinea *f;* e si porti su questa normale, a partire da M, un segmento *k* costante in lunghezza. Se, per una posizione di M, la normale a π incontra il campo limite di F secondo un campo lineare di lunghezza esterna nulla, il rapporto fra il volume descritto da *f* mentre M descrive un campo nel piano π, al volume descritto da *k*, è eguale, per quella posizione di M, al rapporto delle lunghezze di *f* e *k* che descrivono quei campi.

19. Sia AB un arco curvilineo continuo, e A'B' la sua proiezione ortogonale su d'una retta. Supporremo che ogni punto di A'B' sia la proiezione d'un sol punto di AB; che la curva abbia in ogni suo punto una tangente, la quale si possa considerare come il limite della congiungente due punti della linea, che si avvicinano al punto dato; e che l'angolo che questa tangente fa con A'B' non sia mai nullo. Ad ogni arco parte di AB corrisponde la sua proiezione, parte di A'B', e viceversa; la lunghezza s dell'arco e la lunghezza x della sua proiezione sono grandezze coesistenti. Dico che, in ogni punto P di AB, il rapporto fra la lunghezza dell'arco e la lunghezza della sua proiezione è eguale al coseno dell'angolo che la tangente alla curva in P fa colla retta A'B'.

Infatti, preso un arco Δs nelle vicinanze del punto P, e detta c la sua corda, e Δx la proiezione su A'B' sia dell'arco che della corda, sarà

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{\Delta x}{c}\,\frac{c}{\Delta s}.$$

Ora, per le ipotesi fatte (N. 7), $lim\,\frac{c}{\Delta s}=1$; il rapporto $\frac{\Delta x}{c}$ vale il coseno dell'angolo che la corda c fa colla sua proiezione, ed ha per limite il coseno dell'angolo che la tangente in P fa con A'B'. Quindi, detto θ quell'angolo, si conchiude

$$lim\,\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}=cos\theta,\quad dx=cos\theta\,ds,\quad ds=\frac{dx}{cos\theta}.$$

Si deduce da questa formula che, se in tutti i punti dell'arco AB l'angolo θ è compreso fra θ_0 e θ_1, il rapporto fra l'arco finito AB, e la sua proiezione è compreso fra $\frac{1}{cos\theta_0}$ e $\frac{1}{cos\theta_1}$. In particolare, se l'angolo θ è costante, come avviene p. e. nell'elica ove la si proietti sul suo asse, il rapporto fra un arco finito e la sua proiezione ha il valore costante $\frac{1}{cos\theta}$.

20. Sia A una superficie qualunque, e B la sua proiezione ortogonale su d'un piano; supporremo che ogni punto di B sia la proiezione d'un sol punto di A. Ad ogni parte di A corrisponde una parte di B e viceversa, e le aree della figura che si proietta e della sua proiezione sono grandezze coesistenti. Dico che, se in un punto P di A la superficie ha un piano tangente, e l'angolo che ogni retta che unisce due punti della superficie fa con quel piano ha per limite zero, ove i due punti tendano al punto P, allora, nel punto P, il rapporto fra l'area proiezione e l'area che si proietta vale il coseno dell'angolo λ che il piano tangente in P fa col piano su cui si proietta.

Infatti, sia α una porzione di superficie situata nelle vicinanze del punto P, e tale che l'angolo che una retta qualúnque che unisce due punti di α fa col piano tangente in P sia minore ϵ. Sia β la proiezione di α su π. Si proietti ortogonalmente α su d'un nuovo piano π', e sia β' la nuova figura così ottenuta.

Se il piano π' fosse parallelo a π sarebbe l'area $\beta' = \beta$.

Se π' non è parallelo a π, sia OX la loro intersezione. Si immagini un sistema di piani normali ad OX. Uno di essi incontra α secondo una linea s, e incontra β e β' secondo due rette finite h ed h', che sono le proiezioni di s. Detta k la corda di s, sarà $h = k \cos(hk)$, $h' = k \cos(kh')$, e quindi $h' = h \frac{\cos(kh')}{\cos(kh)}$. Ma l'angolo $\widehat{kh}$ è minore della somma dell'angolo che k fa col piano tangente in P, e dell'angolo λ che questo piano tangente fa con π; quindi $\widehat{kh} < \epsilon + \lambda$, e $h' < \frac{h}{\cos(\epsilon + \lambda)}$. Ora, variando il punto di OX da cui si conduce il piano normale ad OX, le rette h e h' descrivono le aree piane β e β', e quindi sarà anche $\beta' < \beta \frac{1}{\cos(\lambda + \epsilon)}$.

Pertanto, se si proietta l'area α su d'un piano qualunque, o, ciò che fa lo stesso, se si sposta nello spazio in modo qualunque la figura α, e poi la si proietta su d'un piano fisso, p. e. π, si avrà per proiezione un'area minore di $\frac{\beta}{\cos(\lambda + \epsilon)}$.

Si decomponga ora l'area α in parti $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, e

e siano $\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n$ le loro proiezioni su π. Trasportando queste parti in modo qualunque nello spazio, e proiettandole su d'un piano fisso, dette $\beta'_1\, \beta'_2 \dots \beta'_n$ le loro proiezioni, sarà

$$\beta'_1 < \beta_1 \frac{1}{\cos(\lambda + \epsilon)}, \quad \beta'_2 < \beta_2 \frac{1}{\cos(\lambda + \epsilon)}, \dots ;$$

e sommando

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_n < (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \frac{1}{\cos(\lambda + \epsilon)},$$

ossia

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_n < \beta \frac{1}{\cos(\lambda + \epsilon)}.$$

Ora l'area di α è appunto il limite superiore della somma $\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_n$; quindi si conchiude

$$\alpha < \beta \frac{1}{\cos(\lambda + \epsilon)}. \qquad (1)$$

Suppongasi ora che il piano π' sia il piano tangente alla superficie in P. Sarà l'angolo $kh' < \epsilon$, e l'angolo $kh > \lambda - \epsilon$; quindi

$$h' > h \frac{\cos\epsilon}{\cos(\lambda - \epsilon)}, \quad \text{e} \quad \beta' > \beta \frac{\cos\epsilon}{\cos(\lambda - \epsilon)}.$$

Ma l'area α è maggiore della sua proiezione β', quindi

$$\alpha > \beta \frac{\cos\epsilon}{\cos(\lambda - \epsilon)}. \qquad (2)$$

Dalle due formule (1) e (2) si deduce immediatamente, poichè ϵ si può rendere piccolo ad arbitrio, che

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\cos\lambda}$$

c. v. d.

Nella proposizione precedente si è fatta l'ipotesi che l'angolo, che la retta, la quale unisce due punti P′ e P″ della superficie, fa col piano tangente in P abbia per limite zero col tendere di P′ e P″ a P. È facile il vedere che se la superficie ha in ogni suo punto P un piano tangente il quale si sposti con continuità spostandosi P, la condizione precedente è soddisfatta. Invero, il piano passante per P′ e P″ e normale al piano tangente in P incontrerà la superficie secondo una curva piana avente tangente in ogni suo punto. La corda P′ P″ è parallela alla tangente all'arco P′ P″ in un certo punto Q; quindi l'angolo che la P′ P″ fa col piano tangente in P è uguale all'angolo che la tangente in Q alla curva P′ P″ fa collo stesso piano. Ma la tangente in Q alla P′ P″ è contenuta nel piano tangente in Q alla superficie; quindi l'angolo che la tangente in Q fa col piano tangente in P è minore dell'angolo che fa con esso il piano tangente in Q. Ora, per le ipotesi fatte, l'angolo dei piani tangenti in P e Q tende a zero, ove P′ e P″, e quindi Q, si avvicinano indefinitamente a P. Dunque l'angolo che la P′ P″ fa col piano tangente in P ha per limite zero col tendere di P′ e P″ a P.

Dalla proposizione dimostrata risulta che se in tutti i punti della superficie A il piano tangente fa col piano di proiezione un angolo λ compreso fra λ_0 e λ_1, il rapporto fra l'area A e l'area della sua proiezione è compreso fra $\frac{1}{\cos \lambda_1}$ e $\frac{1}{\cos \lambda_0}$. In particolare, se l'angolo λ è costante, il rapporto fra l'area A e la sua proiezione vale $\frac{1}{\cos \lambda}$. Questo caso avviene p. e. nel cono di rivoluzione, ove lo si proietti sulla base; e $\cos \lambda$ vale il rapporto fra il raggio della base al lato del cono. Quindi: *l'area d'una porzione qualunque di un cono di rivoluzione sta alla sua proiezione sulla base del cono come il lato del cono sta al raggio della base.* Prendendo la porzione a considerarsi in modo che la sua proiezione sia quadrabile, si possono determinare sulla superficie conica infinite aree quadrabili.

§ 4. Integrali estesi a campi.

21. Sia x una grandezza, funzione distributiva d' un campo, e che assume soli valori positivi. Ad ogni punto dei campi considerati corrisponda un numero ρ, che può variare col punto. Dicesi *integrale di* ρdx *esteso al campo* A una grandezza tale che: 1° sia sempre maggiore del risultato che si ottiene decomponendo il campo A in parti, in modo qualunque, moltiplicando il valore di x corrispondente ad ognuna di queste parti per un numero minore di tutti i valori assunti da ρ in questo campo parziale, e sommando questi prodotti; 2° sia minore della somma dei prodotti dei valori di x corrispondenti alle parti di A per numeri rispettivamente maggiori di quelli assunti da ρ nelle parti stesse; 3° e che sia l'unica grandezza che goda di queste proprietà.

Indicheremo l'integrale di ρdx esteso al campo A colla scrittura $\int_A \rho dx$. Pertanto con $\int_A \rho dx$ intendiamo una grandezza (omogenea con x) tale che, decomposto il campo A in parti in modo qualunque $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, indicando con $x(A_1)$, $x(A_2)$ ... $x(A_n)$ i valori corrispondenti di x, e detti $\rho_1' \, \rho_2' \ldots \rho_n'$ e $\rho_1'' \, \rho_2'' \ldots \rho_n''$ dei numeri, i primi minori e gli altri maggiori dei valori assunti da ρ in quei campi parziali, siano sempre soddisfatte le disuguaglianze

$$\int_A \rho \, dx > \rho_1' \, x(A_1) + \rho_2' \, x(A_2) + \ldots + \rho_n' \, x(A_n)$$

$$\int_A \rho \, dx < \rho_1'' \, x(A_1) + \rho_2'' \, x(A_2) + \ldots + \rho_n'' \, x(A_n),$$

qualunque sia la legge di divisione del campo A, e comunque si prendano i valori di ρ'_i e ρ''_i purchè ρ'_i sia minore dei valori as-

sunti da ρ nel campo A_i, e ρ''_i maggiore degli stessi valori; inoltre sia l'unica grandezza che soddisfi a queste condizioni. Nelle formule precedenti si può supporre che ρ'_i, che non deve superare i valori di ρ nel campo A_i, sia il limite inferiore dei valori di ρ in questo campo; e si può supporre che ρ''_i ne sia il limite superiore.

22. Suppongasi che i valori di ρ corrispondenti ai punti di A siano compresi fra limiti finiti, e si considerino le somme:

$$s' = \rho_1' x(A_1) + \rho_2' x(A_2) + \ldots + \rho_n' x(A_n)$$

e

$$s'' = \rho_1'' x(A_1) + \rho_2'' x(A_2) + \ldots + \rho_n'' x(A_n),$$

le quali dipendono dalla legge con cui si è diviso A in parti, e dalla scelta dei numeri ρ'_i e ρ''_i.

Ogni somma s' è sempre minore d'ogni somma s'', sia che esse corrispondano alla stessa divisione di A, o a divisioni diverse. La cosa è evidente se s' e s'' corrispondono alla stessa divisione di A, poichè in tal caso ρ_i' è minore di tutti i valori di ρ nel campo A_i, e ρ_i'' ne è maggiore, quindi $\rho_i' < \rho_i''$, e moltiplicando per $x(A_i)$, quantità positiva, si ha $\rho_i' x(A_i) < \rho_i'' x(A_i)$, e sommando $s' < s''$. Se poi s' e s'' corrispondessero a divisioni diverse di A, si immagini quella divisione di A che risulta dalla sovrapposizione di amendue. Sostituendo in s' e s'' ai termini $x(A_i)$ la somma dei valori di x corrispondenti alle parti in cui è decomposto A_i, s' e s'' diventano la somma dei valori di x corrispondenti a questa nuova divisione di A, moltiplicati rispettivamente per numeri minori e maggiori dei valori assunti di ρ in questi campi, e quindi sarà sempre $s' < s''$.

Pertanto, le quantità s' avranno un limite superiore, e le s'' un limite inferiore, e il limite superiore delle s' sarà minore o eguale al limite inferiore delle s''.

Se il limite superiore delle s' è eguale al limite inferiore delle s'', il loro valore comune sarà l'$\int_A \rho\, dx$, perchè questa sarà una quantità sempre maggiore dei valori di s', minore dei valori di s'', e la sola quantità compresa fra i valori di s' e di s''.

Ma se il limite superiore delle s' è minore del limite inferiore delle s'', allora questi due limiti, ed ogni quantità compresa fra essi, è maggiore delle s' è minore delle s''; e non si può più parlare di integrale nel senso precedentemente definito. Però a questi limiti daremo dei nomi; chiameremo *integrale inferiore* di $\rho\, dx$, e indicheremo con $\underline{\int}_A \rho\, dx$, il limite superiore dei valori di s', e chiameremo *integrale superiore* di $\rho\, dx$, e indicheremo con $\overline{\int}_A \rho\, dx$, il limite inferiore dei valori di s''.

Potrebbe anche avvenire che non esistano valori finiti ρ' e ρ'' entro cui siano compresi i valori di ρ; anche in questo caso non si può parlare di integrale propriamente detto, ma potrà ancora presentarsi uno dei due integrali, inferiore o superiore, o nessuno.

23. Teorema I. — L'integrale di $\rho\, dx$ (proprio, o superiore, o inferiore) esteso ad un campo somma di più campi è eguale alla somma degli integrali di ρdx estesi a questi campi.

Siano gli integrali inferiori di $\rho\, dx$ estesi ai campi A, B, e $A+B$. Dico che la somma dei due primi è eguale al terzo.

Infatti, si decomponga il campo $A+B$ in parti, in modo qualunque. Una qualunque di queste parti, che indicheremo con $(A+B)_i$ si può decomporre in due A_i e B_i, l'una appartenente al campo A, e l'altra al campo B, badando che di queste due parti una può anche mancare. Si calcoli la somma s' corrispondente a questa divisione; detto ρ_i' un numero minore dei valori di ρ nel campo $(A+B)_i = A_i + B_i$, si avrà

$$s' = \sum_i \rho'_i\, x(A_i + B_i) = \sum_i \rho'_i\, x(A_i) + \sum_i \rho'_i\, x(B_i).$$

Ora ρ'_i è minore dei valori di ρ sia nel campo A_i che nel campo B_i; quindi sarà:

$$\sum_i \rho'_i\, x(A_i) < \underline{\int}_A \rho\, dx, \quad \text{e} \quad \sum_i \rho'_i\, x(B_i) < \underline{\int}_B \rho\, dx;$$

e perciò

$$s' < \underline{\int}_A \rho \, dx + \underline{\int}_B \rho \, dx.$$

D'altra parte, fissato ad arbitrio ϵ, lo si decomponga in due parti ϵ_1 ed ϵ_2; potremo dividere i campi A e B in parti, e prendere in modo i valori di ρ' che

$$\sum_i \rho'_i \, x(A_i) > \underline{\int}_A \rho \, dx - \epsilon_1, \quad \sum_i \rho'_i \, x(B_i) > \underline{\int}_B \rho \, dx - \epsilon_2;$$

onde, sommando, si conchiude che è possibile decomporre il campo $A + B$ in parti A_i e B_i in guisa che la somma dei prodotti dei valori di x corrispondenti a queste parti, per numeri minori dei valori assunti da ρ nelle medesime differisca da $\underline{\int}_A \rho \, dx + \underline{\int}_B \rho \, dx$ meno d'una quantità comunque piccola ϵ. Dunque questa somma è il limite superiore dei valori di s', ossia

$$\underline{\int}_A \rho \, dx + \underline{\int}_B \rho \, dx = \underline{\int}_{A+B} \rho \, dx.$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$\overline{\int}_A \rho \, dx + \overline{\int}_B \rho \, dx = \overline{\int}_{A+B} \rho \, dx;$$

e se gli integrali inferiori coincidono coi superiori, ossia se $\rho \, dx$ è integrabile nei campi A e B, esso sarà pure integrabile nel campo $A + B$, e viceversa, e sarà:

$$\int_A \rho \, dx + \int_B \rho \, dx = \int_{A+B} \rho \, dx.$$

Il teorema precedente si può pure enunciare dicendo che l'integrale, proprio o inferiore o superiore, di $\rho \, dx$, esteso ad un campo, è funzione distributiva di questo campo.

Teorema II. — Se ρ è funzione continua del punto P, nelle vicinanze d'una sua posizione speciale P_0, il rapporto fra il valore dell'integrale (proprio, o inferiore o superiore) di ρdx, esteso ad un campo qualunque ΔA nelle vicinanze di P_0, al valore di x corrispondente a questo stesso campo, col tendere di tutti i punti di ΔA a P_0, tende verso il valore di ρ corrispondente a P_0.

Infatti, sia ρ_0 il valore di ρ che corrisponde a P_0. Fissata una quantità piccola ad arbitrio ϵ, si determini una lunghezza r in modo che il valore di ρ corrisponda ad ogni punto P che dista da P_0 meno di r, differisca da ρ_0 meno di ϵ. Sia ΔA un campo i cui punti distano da P_0 meno di r. I valori di ρ corrispondenti a ΔA saranno compresi fra $\rho_0 - \epsilon$ e $\rho_0 + \epsilon$; quindi gli integrali, proprio inferiore e superiore, di $\rho\, dx$, estesi al campo ΔA sono compresi fra $(\rho_0 - \epsilon)\, x(\Delta A)$ e $(\rho_0 + \epsilon)\, x(\Delta A)$; e i loro rapporti ad $x(\Delta A)$ sono compresi fra $\rho_0 - \epsilon$ e $\rho_0 + \epsilon$; ossia il limite del rapporto di uno qualunque di quegli integrali al valore di x vale ρ_0.

Corollario. — Se in ogni punto d'un campo finito e chiuso S, ρ è funzione continua, esiste l'integrale di $\rho\, dx$ esteso al campo S, o ad una sua parte qualunque.

Infatti, poichè gli integrali inferiore o superiore di $\rho\, dx$ estesi ad un campo A, parte di S, sono funzioni distributive di questo campo A, ed in ogni punto P di S il rapporto del loro valore al valore corrispondente di x è ρ, ossia è lo stesso per amendue gli integrali, si conchiude che i valori degli integrali inferiore o superiore di $\rho\, dx$ estesi al campo S, o ad una sua parte qualunque sono eguali, ossia che esiste l'integrale proprio di $\rho\, dx$ esteso agli stessi campi.

Teorema III. — Se x e y sono grandezze coesistenti, funzioni distributive dei campi che fanno parte d'un campo finito e chiuso S, le quali abbiano in ogni punto P di S un rapporto $\frac{dy}{dx} = \rho$, determinato e finito, [il va-

lore di y corrispondente ad un campo qualunque A, parte di S, vale

$$y(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \rho \, dx.$$

Infatti, diviso il campo A in parti $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n$, se i valori di ρ corrispondenti ai punti di A_i sono maggiori di ρ'_i e minori di ρ''_i, sarà pure $y(\mathrm{A}_i) > \rho'_i \, x(\mathrm{A}_i)$ e $y(\mathrm{A}_i) < \rho''_i \, x(\mathrm{A}_i)$; quindi, sommando le varie diseguaglianze che si ottengono facendo $i = 1, 2, \ldots n$, si ricava:

$$y(\mathrm{A}) > \rho'_1 \, x(\mathrm{A}_1) + \rho'_2 \, x(\mathrm{A}_2) + \ldots + \rho'_n \, x(\mathrm{A}_n) = s'$$

e $$y(\mathrm{A}) < \rho''_1 \, x(\mathrm{A}_1) + \rho''_2 \, x(\mathrm{A}_2) + \ldots + \rho''_n \, x(\mathrm{A}_n) = s'',$$

ossia $y(\mathrm{A})$ soddisfa alle due prime condizioni dell'integrale, di essere cioè maggiore della prima somma s' e minore della seconda s''. D'altronde, ρ è funzione continua del punto P; perciò pel corollario precedente, non esiste altra quantità compresa fra s' ed s'' che $\int_{\mathrm{A}} \rho \, dx$; quindi

$$y(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \rho \, dx.$$

24. Gli integrali geometrici precedentemente definiti presentano massima analogia cogli integrali definiti $\int_a^b f(x) \, dx$ che compaiono nel calcolo integrale; anzi ridurremo il calcolo dei primi al calcolo di questi. Sarà perciò utile di ben fissare il significato di quest'integrale definito, nel modo che sarà per noi più conveniente, e di ricordare a questo proposito alcune proposizioni.

Dicesi *intervallo* (a, b) il sistema di tutti i numeri compresi fra a e b, esclusi o non questi estremi.

Supponiamo, per maggior semplicità, $a < b$, benchè le proposizioni che seguono siano pure applicabili, con leggiere modificazioni, senza questa ipotesi.

Se un intervallo è decomposto in parti, dicasi che esso è *somma* delle sue parti.

Dicasi *ampiezza* d'un intervallo (a, b) la differenza $b - a$. Se l'intervallo (a, b) è decomposto in parti, la sua ampiezza è la somma delle ampiezze delle sue parti: quindi l'ampiezza d'un intervallo è [illegible]zione distributiva del medesimo.

[illegible]a grandezza è funzione distributiva d'un intervallo, la di- [illegible]*oesistente* con quell'intervallo.

[illegible] se $f(x)$ è funzione della variabile numerica x, l'incremento [illegible](a) che essa riceve mentre x varia nell'intervallo (a, b), è [illegible]nte con questo intervallo, perchè l'incremento della funzione [illegible]ervallo (a, b) è la somma dei suoi incrementi nelle parti di (a, b). Così ancora, se P è un punto, la cui posizione dipende da una variabile x; variando x in un intervallo (a, b), il punto P descriverà un campo (un arco di linea) e la lunghezza di questo campo, ed ogni funzione distributiva di esso, è una quantità coesistente coll'intervallo (a, b).

Se una grandezza y è coesistente coll'intervallo percorso dalla variabile x, potremo considerare il limite verso cui tende il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ del valore Δy di y corrispondente ad un intervallo qualunque (a, b), all'ampiezza Δx di questo intervallo, ove si facciano tendere i suoi estremi ad uno stesso valore x. Indicheremo questo limite con $\frac{dy}{dx}$, e lo chiameremo, conformemente a quanto si è fatto, il valore di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pel valore considerato di x. Così, se la quantità coesistente coll'intervallo (a, b) descritto da x è l'incremento $f(b) - f(a)$ d'una funzione $f(x)$, se questa funzione $f(x)$ ha una derivata continua $f'(x)$, sarà

$$\lim \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Risulta dalle cose dette che se y è una grandezza coesistente

coll'intervallo descritto da x, e per ogni valore di x esiste il rapporto $\frac{dy}{dx}$, questo rapporto è funzione continua di x.

25. Essendo $f(x)$ una funzione di x, indicheremo con $\int_a^b f(x)\,dx$ una quantità tale che: 1° sia maggiore della somma dei prodotti delle ampiezze degli intervalli parziali in cui si può dividere l'intervallo (a, b) per valori minori dei valori assunti da $f(x)$ negli stessi intervalli; 2° sia minore della somma dei prodotti delle ampiezze degli intervalli in cui si può decomporre (a, b) per valori maggiori di quelli assunti da $f(x)$ negli stessi intervalli; 3° e che sia l'unica quantità che soddisfi a queste proprietà.

La funzione $f(x)$ si dice *integrabile* nell'intervallo (a, b) se esiste una quantità che goda di tutte le proprietà enunciate.

Sia dalla teoria precedente degli integrali geometrici, sia da proposizioni dimostrate nel calcolo integrale (N. 190-193) si deduce:

I. L'integrale di $f(x)\,dx$ preso nell'intervallo (a, b) è la somma degli integrali di $f(x)\,dx$ presi negli intervalli in cui si può decomporre l'intervallo (a, b):

$$\int^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

In altre parole, l'integrale di $f(x)\,dx$ preso in un intervallo (a, b) è coesistente con questo intervallo.

II. Se $f(x)$ è funzione continua di x, il rapporto dell'integrale di $f(x)dx$ esteso ad un intervallo qualunque (a, b), all'ampiezza $b-a$ di questo intervallo, ove a e b tendano ad uno stesso valore x, ha per limite $f(x)$:

$$\lim \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(x).$$

III. Se y è una grandezza coesistente coll'intervallo descritto

dalla variabile x, e se il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ del valore Δy di y corrispondente ad un intervallo qualunque, all'ampiezza Δx di questo intervallo, tende al limite $\frac{dy}{dx} = f(x)$, ove i limiti di quell'intervallo tendano ad x, il valore di y corrispondente all'intervallo finito (a, b) vale $\int_a^b f(x)\,dx$.

In questa proposizione sta la regola più comune per calcolare un integrale definito. Se $f(x)$ è funzione continua, si determini, colle regole del calcolo integrale, quella funzione $F(x)$ avente per derivata $f(x)$. Allora il rapporto fra l'incremento di $F(x)$ in un intervallo qualunque all'ampiezza di questo intervallo, col tendere degli estremi di questo intervallo ad uno stesso valore x, ha per limite $f(x)$; quindi l'incremento di $F(x)$ nell'intervallo (a, b) è eguale all'integrale di $f(x)\,dx$ preso in quell'intervallo:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

§ 5. Calcolo di alcune aree piane.

26. *Coordinate cartesiane.*

Teorema I. — **Se la funzione positiva $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, b), l'area descritta dall'ordinata MP d'un punto P della curva, la cui equazione in assi cartesiani ortogonali è $y = f(x)$, mentre l'ascissa x varia da a a $b > a$, è misurata da**

$$u = \int_a^b f(x)\,dx.$$

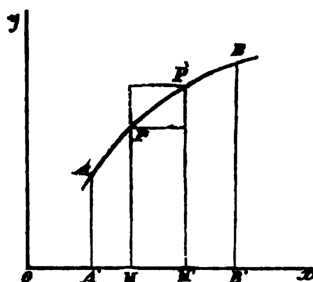
Infatti, decomposto l'intervallo (a, b) in parti coi valori $x_0 = a$ x_1, x_2, $\dots x_{n-1}$, $x_n = b$, e detti $y'_1\, y'_2 \dots y'_n$ dei numeri minori dei valori assunti da $f(x)$ rispettivamente in ciascheduno di quegli intervalli parziali, e detti $y''_1\, y''_2 \dots y''_n$ dei numeri maggiori dei

valori di $f(x)$ in quegli intervalli parziali, poichè per ipotesi $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, b), l' $\int_a^b f(x)\,dx$ sarà una grandezza maggiore della somma

$$s' = (x_1 - x_0)\,y'_1 + (x_2 - x_1)\,y'_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})\,y'_n$$

e minore della somma

$$s'' = (x_1 - x_0)\,y''_1 + (x_2 - x_1)\,y''_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})\,y''_n,$$



e sarà l'unica grandezza sempre maggiore dei valori della prima somma, e minore di quelli della seconda, comunque varii la divisione dell'intervello (a, b), e la scelta dei valori di y'_i e y''_i.

Ora i rettangoli aventi rispettivamente per base i segmenti descritti da M, mentre x varia in ciascheduno di quegli intervalli parziali, e per altezza $y'_1\, y'_2 \dots y'_n$ sono interni alla figura data, e la loro area totale è misurata da s'. Analogamente la figura formata dai rettangoli aventi le stesse basi e per altezze $y''_1\, y''_2 \dots y''_n$, contiene nel suo interno l'area data, e la sua area è misurata da s''. Pertanto il numero che misura l'area (interna, o esterna, o propria) della figura descritta da MP è maggiore di s' e minore di s''. Ma il sol numero $\int_a^b f(x)\,dx$ gode di questa proprietà; dunque l' $\int_a^b f(x)\,dx$ misura l'area descritta dall'ordinata MP.

Se la funzione $f(x)$ non è integrabile nell' intervallo (a, b), ma

ammette solo gli integrali inferiore e superiore, questi misurano le aree interna ed esterna della figura descritta da MP.

TEOREMA II. — L'area descritta dall'ordinata MP d'una curva di equazione $y = f(x)$ in assi cartesiani obliqui che fanno fra loro l'angolo ω, mentre x varia nell'intervallo (a, b), supposta la $f(x)$ positiva e integrabile in quell'intervallo, e $a < b$, è misurata da

$$\operatorname{sen} \omega \int_a^b f(x)\, dx.$$

La dimostrazione si ottiene dalla precedente sostituendo alla considerazione dei rettangoli aventi le basi sull'asse delle x e per altezze le y, i parallelogrammi aventi le stesse basi, e gli altri lati paralleli all'asse delle y e misurati dai valori delle ordinate.

TEOREMA III. — Se nel piano della figura F si segna un asse OX, e da ogni punto M di quest'asse si conduce la perpendicolare ad OX, che incontra la F secondo una figura rettilinea, se il campo formato dai punti d'incontro di questa retta col campo limite di F ha una lunghezza esterna nulla, detta x l'ascissa del punto M, e h la lunghezza della intersezione della perpendicolare in M col campo F, l'area di quella parte della figura F formata dai punti le cui ascisse sono comprese fra a e b è misurata da $\int_a^b h\, dx$.

Infatti, sia Δu il numero che misura l'area formata dai punti di F le cui ascisse sono comprese in un intervallo di ampiezza Δx. Si consideri l'area del rettangolo avente per base il segmento Δx e per altezza 1, la quale è misurata da Δx. In virtù delle ipotesi fatte (N. 18, 1°) col tendere degli estremi dell' intervallo Δx ad uno stesso valore x, $\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = h$; quindi il valore di u corrispondente all' intervallo (a, b) vale $\int_a^b h\, dx$.

27. Applicheremo le formole precedenti ad alcuni esempi.

Parabole. — Nella parabola d'ordine m si ha

$$y = ax^m,$$

e quindi l'area descritta dall'ordinata, mentre l'ascissa fra i valori x_0 ed x_1 è misurata da

$$\operatorname{sen}\omega \int_{x_0}^{x_1} ax^m\, dx = \operatorname{sen}\omega \frac{ax_1^{\ m+1} - ax_0^{\ m+1}}{m+1}, \text{ supposto } m \gtrless 1.$$

Se m è positivo, si può fare $x_0 = 0$, e ponendo x invece di x_1 l'area della parabola, contata a partire dall'origine, vale

$$\frac{ax^{\ m+1}}{m+1} \operatorname{sen}\omega = \frac{xy \operatorname{sen}\omega}{m+1},$$

ossia vale l'$(m+1)^{ma}$ parte dell'area del parallelogrammo costrutto sull'ascissa e sull'ordinata del punto estremo dell'arco considerato.

Se $m = -1$, si ha $y = \frac{a}{x}$, e la curva è un'iperbole riferita ai suoi asintoti. La sua area sarà misurata da

$$\operatorname{sen}\omega \int_{x_0}^{x_1} \frac{a}{x}\, dx = a \operatorname{sen}\omega \log \frac{x_1}{x_0}.$$

Ellisse. — L'equazione dell'ellisse, riferita ai suoi assi, è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

da cui si ricava

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'area descritta dall'ordinata, mentre l'ascissa varia fra i valori

0 ed x, è misurata da

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Si scriva l'integrale del membro di destra sotto la forma

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}\; x\, dx,$$

e poi si integri per parti, prendendo come fattore ad integrarsi $x\, dx$; si avrà

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{a^2}{x \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}}\, dx,$$

ovvero

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

e siccome

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sen}\, \frac{x}{a},$$

si deduce infine

$$u = \frac{1}{2}\, x\, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}\, ab\; \text{arc sen}\, \frac{x}{a}.$$

Se si fa $x = a$, si avrà l'area della quarta parte dell'ellisse $\frac{1}{4}\pi ab$; quindi l'area totale dell'ellisse di semiassi a e b vale πab come già si era trovato.

Iperbole. — Già si è trovata l'area dell'iperbole riferita agli asintoti. Se la si riferisce agli assi, la sua equazione sarà

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

da cui si ricava

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

e l'area descritta dall'ordinata mentre l'ascissa varia fra i valori a ed x è misurata da

$$u = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Integrando per parti, prendendo come fattore ad integrarsi $x\,dx$, si ha:

$$u = \frac{1}{2} \frac{b}{a} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} ab \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

ed infine

$$u = \frac{1}{2} \frac{b}{a} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} ab \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Curva logaritmica. — La sua equazione è

$$y = a^x,$$

e, supposti gli assi ortogonali, variando x fra i valori x_0 ed x_1, l'area corrispondente è misurata da

$$\int_{x_0}^{x_1} a^x\, dx = \frac{a^{x_1} - a^{x_0}}{\log a}.$$

Osservando che $\frac{1}{\log a}$ è la lunghezza della sottotangente, si deduce che l'area compresa fra un arco di curva logaritmica, le ordinate estreme e l'asse delle x, è eguale all'area d'un rettangolo di base la sottotangente e di altezza la differenza delle ordinate estreme.

Supposto $a > 1$, se si fa tendere x_0 verso $-\infty$, $\lim a^{x_0} = 0$, e l'area precedente ha per limite $\frac{a^{x_1}}{\log a}$. Contemporaneamente la figura di cui si determina l'area acquista dei punti che si allontanano indefinitamente dall'origine; il limite trovato misura l'area interna compresa fra l'asse delle x, il ramo infinito della logaritmica, e l'ordinata che corrisponde all'ascissa x_1.

28. *Curve riferite a coordinate polari.*

Teorema. — Se $r = f(\alpha)$ è l'equazione d'una curva riferita a coordinate polari, e r è funzione continua di α, l'area descritta dal raggio vettore, mentre α varia nell'intervallo (α_0, α_1) è misurata da

$$u = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} r^2 \, d\alpha.$$

Infatti, sia OP il raggio vettore di lunghezza r, e che fa coll'asse polare l'angolo α. Sia OM il raggio vettore avente la stessa direzione di OP, e di lunghezza $= 1$. Mentre α descrive un intervallo di ampiezza $\Delta\alpha$, OM descrive un settore circolare di area $\frac{1}{2}\Delta\alpha$, e OP un settore Δu della curva data. Ora, supponendo che gli estremi dell'intervallo descritto da α tendono ad uno stesso valore α, si è visto che

$$\lim \frac{\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta\alpha} = \frac{r^2}{1},$$

quindi

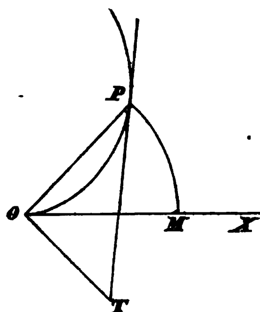
$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta \alpha} = \frac{du}{d\alpha} = \frac{1}{2} r^2, \quad du = \frac{1}{2} r^2 \, d\alpha, \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\alpha,$$

l'integrale essendo preso fra i limiti α_0 e α_1.

29. Ecco alcune applicazioni di questa formula.

Nella *spirale d'Archimede*, in cui

$$r = a\alpha,$$



l'area generata dal raggio vettore, mentre l'argomento varia da 0 ad α, è misurata da

$$\frac{1}{2} \int_0^{\alpha} a^2 \alpha^2 \, d\alpha = \frac{1}{6} a^2 \alpha^3,$$

e quindi essa vale la terza parte dell'area del settore circolare OPM avente per raggio $r = a\alpha$, e per angolo al centro α, ovvero la terza parte del triangolo OPT limitato dal raggio vettore OP, la tangente PT, e la sottotangente OT.

Nella *spirale logaritmica*, in cui $r = Ce^{a\alpha}$, l'area descritta dal raggio vettore sarà

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} C^2 e^{2a\alpha} \, d\alpha = \frac{C^2}{4a} (e^{2a\alpha_1} - e^{2a\alpha_0}).$$

Se qui si fa tendere α_0 a $-\infty$, supposto $a > 0$, l'area considerata, che consta di infinite parti sovrapposte, tende ad un limite finito $\frac{C^2}{4a} e^{2a\alpha_1}$, ed è facile il riconoscere che questa vale la metà dell'area del triangolo compresa fra il raggio vettore, la tangente e la sottotangente.

Sia $r = f(\alpha)$ l'equazione d'una curva riferita a coordinate polari; si immagini la sua *concoide*, con polo in O, e sia h la lunghezza costante che si porta sul prolungamento del raggio vettore. Detto r_1 il raggio vettore della concoide, sarà $r_1 = r + h$, ovvero

$$r_1 = f(\alpha) + h.$$

Dette A e A_1 le aree descritte dai raggi r ed r_1 mentre α varia fra α_0 ed α_1, sarà

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\alpha, \text{ e } A_1 = \frac{1}{2} \int r_1^2 \, d\alpha = \frac{1}{2} \int (r + h)^2 \, d\alpha,$$

ovvero

$$A_1 = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\alpha + h \int r \, d\alpha + \frac{1}{2} h^2 \int d\alpha,$$

gli integrali essendo tutti presi fra i limiti α_0 ed α_1. Delle tre parti di cui consta A_1 la prima rappresenta l'area A della curva data; la terza vale $\frac{1}{2} h^2 (\alpha_1 - \alpha_0)$, ossia è l'area d'un settore circolare di angolo $\alpha_1 - \alpha_0$ e di raggio h; la seconda poi dipende dall' $\int r \, d\alpha$, e una volta calcolato questo integrale, si potrà determinare l'area di tutte le concoidi della curva data corrispondenti ai varii valori di h.

Se si fa

$$B = \frac{1}{2} \int r \, d\alpha, \quad C = \frac{1}{2} \int d\alpha = \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0),$$

si avrà

$$A_1 = A + 2Bh + Ch^2,$$

e così A_1 è una funzione di secondo grado in h. Essa si può scrivere

$$A_1 = C\left(h + \frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{C}.$$

Si scorge di qui che, variando h, varia pure A_1; il suo minimo valore corrisponde ad $h = -\frac{B}{C}$, ed è $\frac{AC - B^2}{C}$; quindi questa ultima quantità è di necessità positiva, e nulla sol quando sia $r_1 = 0$, e quindi $r =$ costante. I valori di A_1, corrispondenti a due valori di h la cui semisomma sia eguale a $-\frac{B}{C}$, sono eguali; se si fa $h = -\frac{2B}{C}$, l'area A_1 diventa eguale all'area della curva data A.

§ 6. Formule d'approssimazione per le aree.

30. L'area piana descritta dall'ordinata $y = f(x)$ d'una curva, in assi cartesiani ortogonali, mentre x varia fra a e b, è, per approssimazione, eguale all'area del trapezio costrutto sulle ordinate estreme. Così facendo, si sostituisce all'arco della curva la sua corda, e all'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, che misura l'area in questione, la quantità

$$(b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2},$$

che misura l'area del trapezio.

Potremo facilmente stimare l'errore che si commette sostituendo all'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ il valore approssimato $(b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2}$.

Invero, se la funzione $f(x)$ ha derivata seconda $f''(x)$ pei valori di x compresi fra a e b, si ha dalla teoria delle funzioni interpolari che

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f(a,b) + (x-a)(x-b)\,\frac{f''(u)}{1\,.\,2},$$

ove $f(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e u è un valore, che dipende da x, e che, se x è compreso fra a e b, è pure compreso fra gli stessi limiti. Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[f(a) + (x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,f''(u)\,dx.$$

Il primo integrale del membro di destra vale appunto

$$(b-a)\,\frac{f(b)+f(a)}{2},$$

ossia il valore approssimato dell'integrale dato. Il secondo integrale rappresenta perciò l'errore che si commette prendendo invece del vero valore dell'integrale, il suo valore approssimato. Chiamandolo R, si avrà:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,f''(u)\,dx.$$

E poichè il fattore $(x-a)(x-b)$ conserva un segno costante mentre x varia nell'intervallo (a, b), potremo portare il fattore $f''(u)$ fuori dell'integrale, e si ha così:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\,f''(u)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx,$$

ovvero, eseguendo l'integrale del secondo membro:

$$R = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(u),$$

ove u è un valore di x compreso fra a e b. Sostituendo si deduce

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(u).$$

Così si ha il vero valore dell'integrale espresso mediante un suo valore approssimato, più un resto nel quale comparisce la quantità incognita u di cui si sa solo che è compresa fra a e b. Sostituendo invece di $f''(u)$ il massimo ed il minimo valore che esso assume mentre u varia nell'intervallo (a, b), si ottengono due espressioni entro cui è compreso il resto.

Ad esempio se si fa in questa formula

$$f(x) = \frac{1}{x},\ a = 1,\ b = 2,\ f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

si ha

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\,\frac{1}{u^3},$$

ossia

$$\log 2 = 0{,}75 + R;$$

il primo termine è il valore approssimato di $\log 2$; il secondo $R = -\frac{1}{6u^3}$ rappresenta l'errore. Siccome u è compreso fra 1 e 2, si deduce $-\frac{1}{6} < R < -\frac{1}{6.8}$, ossia 0,75 è un valore maggiore di $\log 2$, e si ha precisamente $0{,}5933 < \log 2 < 0{,}739166$.

Il resto R si può anche mettere sotto forma d'integrale definito. Invero, si ha applicando due volte l'integrazione per parti:

$$\int f(x)\,\varphi''(x)\,dx = f(x)\,\varphi'(x) - f'(x)\,\varphi(x) + \int \varphi(x)\,f''(x)\,dx.$$

Pongasi $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)$; si avrà

$$\int f(x)\,dx = f(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} f'(x)(x-a)(x-b) + \\ + \frac{1}{2}\int (x-a)(x-b) f''(x)\,dx.$$

Prendendo gli integrali fra i limiti a e b si ottiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\frac{f(b)+f(a)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)\,dx.$$

Il primo termine del secondo membro è il valore approssimato dell'integrale; il secondo è quindi l'errore che si commette in questa approssimazione.

31. Potremo avere un valore più approssimato dell'area, decomponendo l'intervallo (a, b) in n parti eguali, segnando pei punti di divisione le ordinate della curva, e costruendo sopra queste successive ordinate i trapezii, come si è detto. La somma di questi trapezii sarà un valore approssimato dell'area.

Dette $y_0, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n$ le ordinate di questa curva corrispondenti agli $n+1$ punti di divisione di (a, b), le aree di questi trapezii valgono

$$\frac{b-a}{2n}(y_0+y_1),\ \frac{b-a}{2n}(y_1+y_2),\ \dots,\ \frac{(b-a)}{2n}(y_{n-1}+y_n);$$

quindi, sommando, si avrà per approssimazione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

L'errore che si commette adoperando questa formola, ossia la quantità R che bisogna aggiungere al membro di destra per avere il vero valore di quello di sinistra, è la somma degli errori com-

messi in ciascheduno di quegli intervalli parziali, vale a dire

$$R = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}\left[f''(u_1)+f''(u_2)+\ldots+f''(u_n)\right],$$

dove $u_1\, u_2 \ldots u_n$ sono valori di x compresi rispettivamente in quegli intervalli parziali. La quantità entro parentesi si può mettere sotto la forma $n\,f''(u)$, ove u è un valore medio fra i precedenti; quindi il resto si può esprimere mediante la formola

$$R = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} f''(u).$$

Così, se nell'esempio precedente $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ si fa $n=10$, la formola ora trovata dà per approssimazione

$$\log 2 = 0{,}69377,$$

e il resto $R = -\frac{1}{6\,.\,100\,.\,u^3}$, ove u è compreso fra 1 e 2. Quindi il valore precedente è approssimato per eccesso, e differisce dal valore vero meno di $\frac{1}{600}$, e più di $\frac{1}{4800}$.

32. Se la funzione $y=f(x)$ è di grado non superiore al terzo, l'area descritta dall'ordinata $f(x)$, mentre x varia nell'intervallo (a, b), vale esattamente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

ove y_0 e y_2 sono le ordinate corrispondenti alle ascisse estreme a e b, cioè $y_0=f(a)$ e $y_2=f(b)$, e y_1 è l'ordinata corrispondente all'ascissa media $\frac{a+b}{2}$.

Infatti, conservando fisso l'asse delle x, si prenda per nuova origine il punto medio di a e b; ossia facciasi nell'integrale

$$x = \frac{a+b}{2} + X,$$

e pongasi

$$\frac{b-a}{2} = h.$$

La funzione $f(x)$ di x, di grado non superiore al terzo, diventerà una funzione dello stesso grado in X, quindi si potrà porre

$$f(x) = A + BX + CX^2 + DX^3,$$

$$\text{e } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-h}^{+h} (A + BX + CX^2 + DX^3)\,dX = 2Ah + \frac{2}{3} Ch^3.$$

Ma, facendo $X = 0, -h, +h$, la x diventa $\frac{a+b}{2}$, a, b, e $f(x)$ assume i valori y_1, y_0, y_2; onde si ha

$$y_1 = A,$$
$$y_0 = A - Bh + Ch^2 - Dh^3$$
$$y_2 = A + Bh + Ch^2 + Dh^3;$$

e

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6A + 2Ch^2;$$

quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Sostituendo in questa formola ad h il suo valore $\frac{b-a}{2}$ si ha la formola a dimostrarsi.

83. La formola

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

vera quando $f(x)$ è una funzione intera di grado non superiore al terzo, può ritenersi ancora vera per approssimazione, anche quando $f(x)$ non soddisfa a queste condizioni. Così facendo, si commette un errore R, tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \mathrm{R};$$

noi ci proponiamo di calcolare approssimativamente questo errore. Perciò facendo come prima

$$x = \frac{a+b}{2} + \mathrm{X},\quad h = \frac{b-a}{2},\quad \text{e } f\left(\frac{a+b}{2} + \mathrm{X}\right) = \varphi(\mathrm{X}),$$

si avrà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-h}^{+h} \varphi(\mathrm{X})\,d\mathrm{X},$$

e $$\varphi(-h) = y_0,\ \varphi(0) = y_1,\ \varphi(+h) = y_2.$$

Si determini quella funzione $\mathrm{F(X)}$, intera di terzo grado in X, che per $\mathrm{X} = -h,\ 0,\ +h$ assume i valori $y_0,\ y_1,\ y_2$, e che per $\mathrm{X} = 0$ ha la stessa derivata di $\varphi(\mathrm{X})$, ossia $\mathrm{F}'(0) = \varphi'(0)$. Allora si ha che, per ogni valore di X compreso fra $-h$ e $+h$,

$$\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{F(X)} + \mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2 - h^2)\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}(u)}{4!},$$

ove u è un valore di X medio fra h e $-h$ (*). Quindi, integrando,

$$\int_{-h}^{+h} \varphi(X)\, dX = \int_{-h}^{+h} F(X)\, dX + \frac{1}{4!}\int_{-h}^{+h} X^2(X^2-h^2)\,\varphi^{IV}(u)\, dX.$$

Ma l'integrale del primo membro vale $\int_a^b f(x)\,dx$; il primo integrale del secondo membro, poichè $F(x)$ è di terzo grado, vale appunto

$$\frac{2h}{6}(y_0+4y_1+y_2) = \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2);$$

quindi

$$R = \frac{1}{4!}\int_{-h}^{+h} X^2(X^2-h^2)\,\varphi^{IV}(u)\, dX.$$

Per avere un'espressione più conveniente di R, si osservi che il fattore $X^2(X^2-h^2)$ è costantemente negativo, mentre X varia fra $-h$ e $+h$; quindi portando fuori l'altro fattore, si ha

$$R = \frac{\varphi^{IV}(u)}{4!}\int_{-h}^{+h} X^2(X^2-h^2)\, dX;$$

(*) In generale, data una funzione $f(x)$, si può sempre determinare una funzione intera $\varphi(x)$ di x, di grado n, tale che soddisfi alle condizioni

$$\varphi(x_0)=f(x_0),\ \varphi'(x_0)=f'(x_0),\dots\ \varphi^{(\alpha)}(x_0)=f^{(\alpha)}(x_0),$$
$$\varphi(x_1)=f(x_1),\dots\ \varphi^{(\beta)}(x_1)-f^{(\beta)}(x_1),\dots$$
$$\varphi(x_m)=f(x_m)\dots\ \varphi^{(\lambda)}(x_m)=f^{(\lambda)}(x_m),$$

ove $$(\alpha+1)+(\beta+1)+\dots+(\lambda+1)=n+1.$$

Allora si ha:

$$f(x)=\varphi(x)+(x-x_0)^{\alpha+1}\,(x-x_1)^{\beta+1}\dots(x-x_m)^{\lambda+1}\,\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!},$$

in cui u è un valore medio fra $x, x_0, \dots x_n$.

ovvero, poichè

$$\varphi^{IV}(u) = f^{IV}(x), \text{ ove } x = \frac{a+b}{2} + u,$$

ed eseguendo l'integrale del secondo membro:

$$R = -\frac{(b-a)^5}{4!\,5!} f^{IV}(x),$$

ove x è un valore compreso fra a e b.

Così, riprendendo l'esempio già trattato, se si fa

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1, \quad b = 2,$$

si avrà

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0{,}666\ldots, \quad y_2 = 0{,}5:$$

e la formola precedente dà come valore approssimato di log 2

$$0{,}6944\ldots, \text{ con } R = -\frac{1}{120\,x^5},$$

ove x è compreso fra 1 e 2. Quindi la formola dà per log 2 un valore più grande del vero, e l'errore che si commette è minore di $\frac{1}{120}$.

34. Si può avere con maggiore approssimazione l' $\int f(x)\,dx$, decomponendo l'intervallo (a, b) in $2n$ parti; detti $y_0\, y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_{2n}$ i valori di $f(x)$, ossia delle ordinate della curva corrispondenti a questi punti di divisione, potremo applicare successivamente la formula precedente alle aree comprese fra le ordinate y_0 e y_2, y_2 e y_4, ... y_{2n-2} e y_{2n}, e sommare i risultati ottenuti. Queste aree val-

gono rispettivamente

$$\frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+y_2),\ \frac{b-a}{6n}(y_2+4y_3+y_4),\ldots,$$

$$\frac{b-a}{6n}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n});$$

quindi, sommando, si ha per approssimazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\Big[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})\Big].$$

Questa formola, che permette di calcolare per approssimazione un'integrale, ossia un'area piana, porta il nome di *formula di Simpson.* Applicandola si commette un errore R che potremo stimare facilmente. Invero quest'errore è la somma degli errori commessi in ciascheduno degli n intervalli parziali, eguali in ampiezza a $\frac{b-a}{n}$, in cui si è diviso (a, b). Ora questi valgono rispettivamente

$$-\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}f^{IV}(x_1),\quad -\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}f^{IV}(x_2),\ldots -\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}f^{IV}(x_n),$$

in cui $x_1\,x_2\ldots x_n$ sono valori di x compresi in quegli intervalli. Quindi, sommando,

$$R=-\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}\Big[f^{IV}(x_1)+f^{IV}(x_2)+\ldots+f^{IV}(x_n)\Big];$$

la quantità entro parentesi si può mettere sotto la forma $n\,f^{IV}(x)$, ove x è un valore compreso fra a e b; si deduce quindi per R la seguente espressione

$$R=-\frac{(b-a)^5}{n^4\,4!\,5!}f^{IV}(x).$$

Applichiamo questa formola di Simpson al solito esempio

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2,$$

facendo $n = 5$, e quindi $2n = 10$.

Dando perciò ad x i valori 1,0; 1,1; 1,2; ... 1,9; 2,0, e detti $y_0\, y_1 \ldots y_{10}$ i valori corrispondenti di $\frac{1}{x}$, l'operazione si può disporre come segue:

$$\begin{array}{lll}
y_0 = 1 & y_2 = 0,83333 & y_1 = 0,90909 \\
y_{10} = 0,5 & y_4 = 0,71429 & y_3 = 0,76923 \\
\hline
y_0 + y_{10} = 1,5 & y_6 = 0,62500 & y_5 = 0,66667 \\
 & y_8 = 0,55556 & y_7 = 0,58824 \\
\cline{2-2}
 & y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 2,72818 & y_9 = 0,52632 \\
\cline{3-3}
 & & y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 = 3,45955
\end{array}$$

Addizionando la prima somma col doppio della seconda e col quadruplo della terza si ha 20,79456; e moltiplicando questo risultato per $\frac{(b-a)}{6n} = \frac{1}{30}$ (cioè dividendolo per 30) si ha per valore di log2 dato dalla formula di Simpson, 0,693152. L'errore che si commette è dato da $R = -\frac{1}{5^4 . 5!}\frac{1}{x^5}$, ove x è compreso fra 1 e 2. Quindi il valore trovato per log2 è più grande del vero, e ne differisce meno di $\frac{1}{75000}$.

35. In generale, se si conoscono i valori $y_0\, y_1 \ldots y_n$ della funzione y corrispondenti ai valori $x_0\, x_1 \ldots x_n$ della variabile, si può formare un polinomio intero di grado n, e che diremo $\varphi(x)$, tale che pei valori suddetti della variabile assuma gli stessi valori di $f(x)$. Si avrà allora

$$f(x) = \varphi(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!},$$

ove u è un valore medio fra i precedenti. Quindi integrando si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mathrm{R},$$

ove si è posto

$$\mathrm{R} = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (x-x_0)\ldots(x-x_n)\, f^{(n+1)}(u)\,dx.$$

L'integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ è un valore approssimato dell'integrale cercato. Il suo valore si ottiene con tutta facilità; invero mettendo la funzione $\varphi(x)$ sotto la forma data da Lagrange:

$$\varphi(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\, y_0 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\, y_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\, y_n$$

si avrà

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \mathrm{A}_0\, y_0 + \mathrm{A}_1\, y_1 + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n\, y_n$$

ove si è fatto

$$\mathrm{A}_0 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\,dx, \ldots\ldots$$

Così l'integrale è una funzione lineare omogenea dei valori $y_0\, y_1 \ldots, y_n$, poichè i coefficienti $\mathrm{A}_0\, \mathrm{A}_1 \ldots$ dipendono bensì da a, b, x_0, $x_1, \ldots x_n$, ma non dai valori di y.

L'errore che si commette in questa approssimazione è rappre-

sentato da R; ma siccome in esso il fattore $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ cambia segno quando x assume i valori $x_0, x_1, \dots$ non si potrà applicare un procedimento analogo a quelli di prima per ridurlo ad una forma più comoda.

36. I valori $x_0\, x_1 \dots x_n$ si possono prendere ad arbitrio; come caso particolare si può supporre che il primo sia a, l'ultimo b, e che essi formino una progressione aritmetica. Ma essi si possono scegliere in un modo speciale, proposto da Gauss, assai conveniente nei casi pratici.

Per semplicità di scrittura, supporremo che i limiti dell'integrale siano -1 e $+1$; poichè, ove fossero qualunque a e b, basta fare la trasformazione $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b+a}{2} t$ affinchè si riducano ai precedenti. Ciò premesso, dico che si può determinare una funzione X_{n+1} di x, intera, di grado $n+1$, in cui il coefficiente del termine di grado più elevato sia l'unità, e tale che, essendo U una funzione intera qualunque di grado non maggiore di n, si abbia sempre

$$\int_{-1}^{+1} U X_{n+1}\, dx = 0.$$

Per determinare questa funzione si osservi che dall'integrazione per parti più volte ripetuta si ha

$$\int U \frac{d^{n+1} V}{dx^{n+1}} dx = U \frac{d^n V}{dx^n} - \frac{dU}{dx} \frac{d^{n-1} V}{dx^{n-1}} + \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^{n-2} V}{dx^{n-2}} - \dots\dots$$

$$\pm \frac{d^{n-1} U}{dx^{n-1}} \frac{dV}{dx} \mp \frac{d^n U}{dx^n} V \pm \int V \frac{d^{n+1} U}{dx^{n+1}} dx.$$

Suppongasi che V rappresenti la funzione di grado $2n+2$

$$V = (x^2 - 1)^{n+1}$$

che ha le radici 1 e -1 multiple $n+1$ volte. Per note proposizioni di

algebra si deduce che $\frac{dV}{dx}$ sarà una funzione di grado $2n+1$, che ha le radici 1 e -1 multiple n volte, ed una radice compresa fra -1 e $+1$; $\frac{d^2V}{dx^2}$ è una funzione di grado $2n$, avente le radici 1 e -1 multiple $n-1$ volte, e due radici comprese fra -1 e $+1$;.... che $\frac{d^nV}{dx^n}$ è di grado $n+2$, avente le radici 1 e -1 semplici, e le altre radici tutte reali comprese fra -1 e $+1$; e che infine $\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}}$ è una funzione di grado $n+1$, aventi le $n+1$ radici reali e comprese fra -1 e $+1$. Allora, prendendo gl'integrali nell'ultima formula fra -1 e $+1$ ed osservando che tutti i termini fuori del segno integrale si annullano per questi limiti, si dedurrà:

$$\int_{-1}^{+1} U \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} dx = \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} dx. \quad (1)$$

Ora se U è una funzione intera di grado non maggiore di n, sarà $\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} = 0$, e quindi

$$\int_{-1}^{+1} U \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} dx = 0.$$

Il coefficiente del termine di grado più elevato in $\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}$ è $(n+2)(n+3)\dots(2n+2)$; quindi, se si fa

$$X_{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(2n+2)} \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}},$$

X_{n+1} sarà appunto un polinomio intero di grado $n+1$ in x, in cui il coefficiente del termine di grado più elevato è l'unità, e tale che essendo U una funzione intera qualunque di grado non maggiore di n si abbia sempre

$$\int_{-1}^{+1} U X_{n+1} dx = 0.$$

Inoltre questa funzione X_{n+1} ha tutte le sue radici reali comprese fra -1 e $+1$. Dettele $x_0, x_1 \ldots x_n$, sarà

$$X_{n+1} = (x - x_0)\,(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Sia ora $f(x)$ una funzione qualunque di x, avente le successive derivate fino all'ordine che ci occorrerà. Si determini il polinomio intero $\varphi(x)$ di grado n, che per $x = x_0, x_1, \ldots x_n$, radici dell'equazione $X_{n+1} = 0$, assume gli stessi valori $y_0\, y_1 \ldots y_2$ che assume $f(x)$. Sia $\psi\,(x)$ quella funzione intera di grado $2n+1$ definita dalle condizioni

$$\psi\,(x_0) = f(x_0),\ \psi\,(x_1) = f(x_1), \ldots \psi\,(x_n) = f(x_n);$$
$$\psi'\,(x_0) = f'\,(x_0),\ \psi'\,(x_1) = f'\,(x_1), \ldots \psi'\,(x_n) = f'\,(x_n).$$

Siccome la differenza $\psi\,(x) - \varphi\,(x)$ si annulla per $x = x_0, x_1, \ldots x_n$, essa sarà divisibile per $(x - x_0)\,(x - x_1) \ldots (x - x_n) = X_{n-1}$; detto $\lambda\,(x)$ il quoziente della divisione che sarà un polinomio di grado n, si avrà

$$\psi\,(x) = \varphi\,(x) + X_{n+1}\,\lambda\,(x).$$

Inoltre, poichè i valori di $f(x)$ e $\psi\,(x)$, e delle loro derivate sono eguali per $x = x_0, x_1, \ldots x_n$, si può porre:

$$f(x) = \psi\,(x) + (x - x_0)^2\,(x - x_1)^2 \ldots (x - x_n)^2\,\frac{f^{(2n+2)}\,(u)}{(2n+2)!},$$

ovvero sostituendo

$$f(x) = \varphi\,(x) + X_{n+1}\,\lambda\,(x) + X^2_{n+1}\,\frac{f^{(2n+2)}\,(u)}{(2n+2)!},$$

ove u è un valore di x compreso fra i considerati.

Integrando fra -1 e $+1$ si ottiene

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \varphi\,(x)\,dx +$$
$$\int_{-1}^{+1} X_{n+1}\,\lambda\,(x)\,dx + \frac{1}{(2n+2!)}\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,f^{(2n+2)}(u)\,dx.$$

Ora $\lambda(x)$ è una funzione intera di grado n in x; quindi, in virtù della proprietà delle funzioni X, sarà

$$\int_{-1}^{+1} X_{n+1}\,\lambda(x)\,dx = 0,$$

e la formola precedente diventa

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx + R,$$

ove

$$R = \frac{1}{(2n+2)!}\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\, f^{(2n+2)}(u)\,dx.$$

L' $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$ è il valore approssimato dell'integrale proposto, ottenuto col metodo di Gauss. Esso si può calcolare come si è detto, e mettere sotto la forma

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = A_0 y_0 + A_1 y_1 + \ldots + A_n y_n,$$

ove

$$A_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\,dx, \ldots\ldots$$

R è l'errore che si commette in questa approssimazione. Siccome X^2_{n+1} è sempre positivo, si porti fuori del segno integrale $f^{(2n+2)}(u)$. Si avrà:

$$R = \frac{f^{(2n+2)}(u)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,dx,$$

in cui u è un valore di x compreso fra -1 e $+1$. Per eseguire

l' $\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,dx$, che è un numero che dipende puramente da n, si decomponga il differenziale ad integrarsi in $X_{n+1} . X_{n+1}\,dx$, e lo si integri per parti $n+1$ volte; ovvero, ciò che fa lo stesso, si applichi la formula (1), in cui si faccia $U = X_{n+1}$; dopo alcune riduzioni si avrà:

$$\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,dx = \frac{1.2.\dots(n+1)}{(n+2)(n+3)\dots(2n+2)} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+1}\,dx.$$

Ora

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+1}\,dx = 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^{n+1}\,dx,$$

colla sostituzione $x = \cos t$ diventa

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+1}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+3} t\,dt = 2\,\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots\frac{2n+2}{2n+3};$$

e quindi

$$R = 2\,\frac{1.2.\dots(n+1)}{(n+2)(n+3)\dots(2n+2)}\,\frac{2.4.6.\dots 2n+2}{3.5.7.\dots 2n+3}\,\frac{f^{(2n+2)}(u)}{(2n+2)!}.$$

La funzione X_{n+1}, le sue radici $x_0\,x_1\dots x_n$, i coefficienti $A_0\,A_1\dots A_n$ del valore approssimato dell'integrale

$$A_0\,y_0 + A_1\,y_1 + \dots + A_n\,y_n,$$

e l'errore che si commette nell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ applicando il metodo di Gauss, per i più semplici valori di n sono i seguenti:

I.

$$X_1 = x,\ x_0 = 0,\ A_0 = 1.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R.$$

dove

$$R = \frac{(b-a)^3}{12}\,\frac{f''(u)}{3!} \qquad (a < u < b).$$

II.

$$X_2 = x^2 - \frac{1}{3};$$

$$-x_0 = x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735.....$$

$$A_0 = A_1 = \frac{1}{2}.$$

La formula generale diventa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] + R$$

ove

$$R = \frac{(b-a)^5}{180}\,\frac{f^{IV}(u)}{4!}.$$

III.

$$X_3 = x^3 - \frac{3}{5}\,x.$$

$$x_1 = 0;\ -x_0 = x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}77502.....$$

$$A_1 = \frac{8}{18},\ A_0 = A_2 = \frac{5}{18}.$$

La formola generale è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{18}\left[5f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 5f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] + R,$$

ove

$$R = \frac{(b-a)^7}{2800}\,\frac{f^{(6)}(u)}{6!}.$$

IV.

$$X_4 = x^4 - \frac{6}{7}\,x^2 + \frac{3}{35}$$

$$-x_0 = x_3 = 0{,}86113.....;\ -x_1 = x_2 = 0{,}33999.$$

$$A_0 = A_3 = 0{,}17392;\ A_1 = A_2 = 0{,}32607.$$

L'errore che si commette in questa formula nell' $\int_a^b f(x)\,dx$ è dato da

$$R = 0{,}000022.....\,\frac{(b-a)^9}{8!}\,f^{(8)}(u).$$

§ 7. Volumi.

37. Teorema. — Se F è una figura solida, e per ogni punto M d'un asse fisso OX si conduce il piano normale ad OX, che incontri F secondo una figura piana, se l'intersezione di questo piano normale ad OX in M col campo limite di F è una figura piana di area esterna nulla, allora detta ω l'area dell'intersezione di questo piano con F e detta x l'ascissa OM del punto M, il volume di quella parte di F i cui punti hanno ascisse comprese nell'intervallo (a, b) è misurato da

$$v = \int_a^b \omega \, dx.$$

Infatti sia Δv il volume di quella parte di F i cui punti hanno ascisse comprese in un intervallo di ampiezza Δx. Si immagini un cilindro avente le generatrici parallele ad OX, di altezza Δx e la cui base sia l'unità di area; il suo volume sarà misurato da Δx. Ora, in virtù delle ipotesi fatte, il limite del rapporto di questi due volumi $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, ove gli estremi dell'intervallo Δx tendano ad uno stesso valore x, ha per limite l'area ω:

$$\frac{dv}{dx} = \omega, \quad dv = \omega \, dx,$$

quindi, il valore di v corrispondente a tutto l'intervallo (a, b) è dato da $v = \int_a^b \omega \, dx$.

38. Applicheremo la formola precedente ad alcuni casi particolari.

Cono. — Vogliasi determinare il volume del cono (o piramide) avente per base una figura piana di area B, e per altezza h. Sia O il vertice del cono; prendasi per asse OX la perpendicolare abbassata da O sulla base; allora il piano normale ad OX in un punto M di ascissa x taglia questo cono secondo una figura simile alla base. Quindi, detta ω l'area di questa sezione, sarà

$$\omega : \mathrm{B} = x^2 : h^2,$$

onde

$$\omega = \frac{x^2}{h^2}\,\mathrm{B},$$

e il volume totale del cono

$$v = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}\,\mathrm{B}\,dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{B}h,$$

come si dimostra in geometria elementare per le piramidi, e come già abbiamo dimostrato per i coni a base qualunque.

Ellissoide. — Riferito l'ellissoide ai suoi tre assi, la sua equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Il piano normale ad Ox nel punto d'ascissa x incontra l'ellissoide secondo una ellisse; detti α e β i semiassi di questa ellisse, i punti di coordinate $(x, \alpha, 0)$, $(x, 0, \beta)$ stanno sull'ellissoide; quindi si hanno le equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\alpha^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = 1,$$

da cui si ricavano le incognite α e β:

$$\alpha = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \beta = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'area ω di questa ellisse vale

$$\omega = \pi \alpha \beta = \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Il volume totale dell'ellissoide si ottiene prendendo l'$\int \omega \, dx$ fra i limiti $-a$ e $+a$; quindi

$$v = \pi \frac{bc}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \, dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Se si fa $a = b = c = r$, l'ellissoide diventa una sfera di raggio r, e il suo volume vale $\frac{4}{3} \pi r^3$.

In modo analogo si determina il volume degli iperboloidi ad una e a due falde di equazioni

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ e } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Paraboloide di rivoluzione. — La parabola conica, di equazione $y^2 = 2px$, ruoti attorno al suo asse Ox. Essa genererà un paraboloide di rivoluzione. Il piano normale all'asse Ox, in un punto di ascissa x, incontra la superficie secondo un cerchio di raggio y, e di area $\omega = \pi y^2 = 2\pi px$. Il volume del segmento compreso fra la superficie del paraboloide e il piano normale al suo asse nel punto di ascissa x vale

$$v = \int_0^x \omega \, dx = 2\pi p \int_0^x x \, dx = \pi p x^2,$$

che si può pure scrivere

$$v = \frac{1}{2} . 2\pi px . x = \frac{1}{2} \omega . x;$$

quindi il volume del segmento di paraboloide è eguale alla metà del volume del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza.

Solidi di rivoluzione. — Se la curva di equazione $y = f(x)$ in assi ortogonali, ruota attorno all'asse delle x, il volume generato dall'area limitata dalla curva, da due ordinate corrispondenti alle ascisse a e b e dall'asse delle x, è misurato da $\pi \int_a^b y^2 \, dx$.

39. Poichè il volume d'un solido F, limitato da due piani normali all'asse Ox, corrispondenti alle ascisse a e b è misurato da $\int_a^b \omega dx$, potremo applicare al calcolo di questo integrale, e quindi al calcolo del volume i noti metodi di approssimazione. Come caso particolare, se segando il volume con tre piani normali ad Ox, ed equidistanti fra loro, le aree delle sezioni sono ω_0, ω_1, ω_2, si avrà in generale per approssimazione

$$\int_a^b \omega \, dx = \frac{b-a}{6} (\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2),$$

e questa formola è rigorosamente vera se ω è una funzione intera di x di grado non superiore al terzo. Quindi, in questo caso, il volume cercato è eguale alla distanza $(b - a)$ dei piani estremi, moltiplicata per la sesta parte della somma delle aree delle sezioni estreme, e del quadruplo dell'area della sezione media.

Così, ad esempio, poichè l'area ω sezione d'un ellissoide con un piano normale al suo asse Ox è funzione di secondo grado x, si deduce che il volume totale dell'ellissoide, cioè il volume compreso fra i due piani tangenti all'ellissoide nei suoi punti d'incontro con Ox, è eguale alla distanza di questi piani $2a$ moltiplicata pel sesto della somma delle aree sezioni estreme e del quadruplo di quella media. E poichè le aree estreme sono nulle, e la media vale πbc, il volume dell'ellissoide vale $\frac{4}{3} \pi abc$, come già si è trovato.

Come altro esempio, si consideri il volume comune a due cilindri circolari retti, aventi lo stesso raggio r, ed i cui assi si incontrano sotto l'angolo θ. Il piano passante per gli assi dei due cilindri incontra il solido secondo un parallelogrammo di area $4r^2 \operatorname{sen}\theta$; ogni piano parallelo ad esso, alla distanza x, incontra lo stesso solido secondo un parallelogrammo, simile al primo, e la cui area ω vale $4(r^2 - x^2) \operatorname{sen}\theta$. Perciò, siccome ω è funzione di secondo grado di x, applicando la formola precedente, si ha che il volume del solido comune ai due cilindri vale i $\frac{2}{3}$ del volume del parallelepipedo avente per base il parallelogrammo $4r^2 \operatorname{sen}\theta$, e per altezza $2r$, diametro comune ai due cilindri.

§ 8. Archi curvilinei.

40. Teorema. — Se la posizione del punto P è funzione della variabile numerica t, avente per derivata il segmento **u**, funzione continua di t, detto u il numero che misura la lunghezza di **u**, l'arco descritto da P, mentre t varia nell'intervallo (t_0, t_1) è misurato da

$$s = \int_{t_0}^{t_1} u\, dt.$$

Infatti sia Δs la lunghezza dell'arco descritto da P, mentre t varia in un intervallo parte di (t_0, t_1), e la cui ampiezza sia Δt. Sia c la corda di quest'arco Δs. Si avrà $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{c} \cdot \frac{c}{\Delta t}$. Facendo tendere Δt a zero, il fratto $\frac{\Delta s}{c}$, che è il rapporto fra la lunghezza dell'arco alla sua corda, ha per limite l'unità, per quanto si è visto. Il rapporto $\frac{c}{\Delta t}$ ha per limite u; quindi

$$\frac{ds}{dt} = u, \quad ds = u\, dt, \quad \text{e} \quad s = \int_{t_0}^{t_1} u\, dt.$$

41. Se il punto P è riferito a coordinate, cartesiane o polari, sostituendo, in s, ad u la sua espressione mediante le derivate di queste coordinate, la formola precedente può assumere forme varie. Così:

Il punto P si muova in un piano, e siano x ed y le sue coordinate cartesiane ortogonali, che supporremo funzioni d'una variabile t,

Detti **i** e **j** i segmenti di riferimento, si avrà

$$OP \equiv x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},$$

quindi, derivando,

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j},$$

e

$$gr\,\mathbf{u} = u = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

quindi

$$ds = u\,dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se la variabile t coincide coll'ascissa x, sarà

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Siano r ed α le coordinate polari del punto P, e sia r funzione di α. Si avrà, conservando le notazioni della pag. 80,

$$OP \equiv r\mathbf{a}, \quad \mathbf{u} \equiv r\mathbf{a}' + r'\mathbf{a}, \quad u = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2},$$

e

$$ds = u\,d\alpha = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\alpha^2}$$

Siano x, y, z le coordinate cartesiane ortogonali del punto P, funzioni di t. Si ha

$$u = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad \text{e} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Siano r, θ, φ le coordinate polari del punto P, che supporremo funzioni di t. Si è trovato (pag. 110) che

$$u = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2};$$

quindi

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta\, d\varphi^2}.$$

42. *Parabole.* — Sia dapprima la parabola conica riferita all'asse e alla tangente nel vertice. La sua equazione sarà

$$y^2 = 2px.$$

Differenziando, si ha $ydy = pdx$. Quindi sostituendo in

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

a dx il suo valove $\frac{ydy}{p}$, si ha

$$ds = \sqrt{\frac{y^2}{p^2} + 1}\, dy = \frac{1}{p}\sqrt{y^2 + p^2}\, dy;$$

e la lunghezza dell'arco compreso fra l'origine, per cui $y = 0$, e un punto qualunque di ordinata y è misurata da

$$s = \frac{1}{p}\int_0^y \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

L'integrale che qui comparisce si può scrivere

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y y \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\, dy\,;$$

quindi, integrando per parti e prendendo come fattore da integrarsi $y\,dy$, si ha, dopo alcune riduzioni,

$$s = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}},$$

e infine

$$s = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

Sia, più generalmente, la parabola di equazione in assi ortogonali

$$y = ax^m.$$

Si avrà $dy = max^{m-1}\,dx$, e sostituendo in $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ si ha

$$ds = \sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}}\, dx.$$

Il differenziale che qui comparisce è un differenziale binomio. Esso è integrabile, sotto forma finita, tutte le volte che è intero uno dei numeri $\frac{1}{2(m-1)}$ e $\frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2}$, vale a dire quando m ha la forma $m = \frac{i+1}{i}$, ove i sia un intero qualunque. Attribuendo ad i i valori 1, 2, 3, ..., si hanno per m i valori $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, ...; ed attribuendo ad i i valori -2, -3, ... si hanno per m i valori $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, ... reciproci dei precedenti; ma le due serie di parabole così ottenute si scambiano l'una nell'altra scambiando gli assi fra loro.

Se si conviene di contare l'arco a partire dall'origine, supposto $m > 0$, si ha

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}}\, dx = \int_0^x x^{m-1} \sqrt{x^{-2(m-1)} + m^2 a^2}\, dx;$$

integrando per parti, essendo $x^{m-1}\,dx$ il fattore ad integrarsi, si ha

$$s = \frac{x}{m} \sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}} + \frac{m-1}{m} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}}}.$$

La parte integrata, che si può scrivere $\sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)^2 + (ax^m)^2}$, rappresenta la lunghezza TP della tangente all'arco nel suo estremo P, cioè la porzione di tangente compresa fra il punto P, e il suo punto d'incontro T coll'asse delle x.

43. *Ellisse.* — Se si fa

$$x = a \operatorname{sen} t, \quad y = b \cos t,$$

variando t, il punto P, le cui coordinate cartesiane ortogonali siano x e y descrive, come è noto, un'ellisse, i cui semiassi sono diretti secondo gli assi cartesiani, e valgono a e b.

Differenziando si ha

$$dx = a \cos t\, dt, \quad dy = -b \operatorname{sen} t\, dt,$$

quindi

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt,$$

ed

$$s = \int \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Se l'integrale si prende fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, il punto P descrive

un quadrante di ellisse. Perciò la lunghezza E dell'intiero perimetro dell'ellisse vale

$$(1) \qquad E = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

L'integrale che qui comparisce non si può calcolare sotto forma finita colle funzioni algebriche o trascendenti elementari. Lo calcoleremo per approssimazione.

Supposto $a > b$, pongasi nell'espressione di E invece di $\cos^2 t$ il suo valore $1 - \operatorname{sen}^2 t$, e facciasi $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, sicchè il numero e è l'eccentricità dell'ellisse. Si avrà:

$$E = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt;$$

l'integrale di destra dicesi, con Legendre, integrale ellittico completo di seconda specie. Noi lo svilupperemo in serie. Perciò si ha dalla formola del binomio

$$\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t} = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 t -$$

$$- \frac{1}{2.4} e^4 \operatorname{sen}^2 t - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \operatorname{sen}^6 t - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} e^8 \operatorname{sen}^8 t - \ldots;$$

e la formola è valida qualunque sia t, perchè, essendo $e^2 < 1$ e $\operatorname{sen}^2 t < 1$, sarà pure $e^2 \operatorname{sen}^2 t < 1$. Inoltre la serie di destra è di convergenza equabile, perchè i termini di essa sono rispettivamente minori, in valore assoluto, di quello che diventerebbero ove si facesse $\operatorname{sen} t = 1$, i quali termini sono indipendenti da t e formano una serie convergente. Quindi, moltiplicando per dt ed integrando, si ha

$$E = 4a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{1}{2} e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\, dt - \frac{1}{2.4} e^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 t\, dt - \ldots \right],$$

e sostituendo agli integrali del secondo membro i loro valori (Calc. pag. 309).

$$(2) \qquad E = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3e^4 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5e^6 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 7e^8 - \ldots\right].$$

La quantità racchiusa entro parentesi, moltiplicata per a, ossia $\frac{E}{2\pi}$, rappresenta il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale al perimetro dell'ellisse.

44. Invece dello sviluppo precedente potremo dare delle formole di approssimazione di E, che in alcuni casi possono riuscire più comode.

Poichè la quantità $\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \text{sen}^2 t}$ si può scrivere

$$\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\,\text{sen}^2 t},$$

ovvero

$$\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 t},$$

si deduce che essa è minore di a e maggiore di b:

$$b < \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\,\text{sen}^2 t} < a,$$

quindi, sostituendo nell'espressione (1) si ricava

$$(3) \qquad 2\pi b < E < 2\pi a;$$

la quale formola ci dice che la lunghezza dell'ellisse è maggiore della circonferenza di raggio il semiasse minore b, e minore della circonferenza di raggio il semiasse maggiore a, cosa del resto evidente.

Quindi si avrà un valore approssimato di E prendendo la semi-

somma dei valori precedenti

$$\pi(a+b),$$

ma questo valore è più piccolo del vero. Infatti si ha

$$\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t} = a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t +$$

$$+ (a-b)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}},$$

e sostituendo in (1), ed eseguiti i calcoli indicati, si ha

$$(4)\quad E = \pi(a+b) + 4(a-b)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}},$$

e siccome il secondo termine è positivo, si conchiude $E > \pi(a+b)$. Si possono trovare dei limiti entro cui è compreso l'integrale di destra; invero si ha

$$b < a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t < a,$$

$$b < \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t} < a,$$

quindi

$$\frac{1}{2b} > \frac{1}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}} > \frac{1}{2a};$$

si moltiplichi per $\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt$, e si integri fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Osservando che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{16},$$

si deduce

$$\frac{\pi}{32b} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}} > \frac{\pi}{32a},$$

onde sostituendo nell'espressione (4) di E:

$$(5)\qquad E > \pi(a+b) + \pi\frac{(a-b)^2}{8a}, \quad E < \pi(a+b) + \pi\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Quindi il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale ad E, cioè $\frac{E}{2\pi}$, risultà compreso fra

$$\frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{16a}, \qquad e \qquad \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{16b}.$$

Così, se p. e. si fa $a = 41, b = 40$, si trova applicando queste formole, che il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale all'ellisse di semiassi 41 e 40 è compreso fra

$$40{,}50152 \quad e \quad 40{,}50156,$$

e così resta determinato con quattro cifre decimali esatte.

In modo analogo si possono trovare infinite altre espressioni che comprendono il valore di E. Così, se nella formola (4) invece di $\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}$ si pone $a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t$, che ne è minore, si deduce

$$E < \pi(a+b) + 2(a-b)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \, dt}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t},$$

ovvero, calcolando questo integrale,

$$E < \pi(a+b) + \frac{\pi}{2}\frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2},$$

che si può anche scrivere

$$E < \pi(a+b) + \frac{\pi}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

45. Un'altra formula approssimata per l'arco d'ellisse si può ottenere per quest'altra via. Si ha

$$\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = b + (a - b)\cos t$$

$$- 2b(a-b)\frac{\cos t\,(1-\cos t)}{b + (a-b)\cos t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}};$$

quindi

$$E = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt = 2\pi b + 4(a-b)$$

$$- 8b(a-b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,(1-\cos t)}{b + (a-b)\cos t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}}\, dt.$$

Ora, poichè l'ultimo integrale è positivo, si deduce

$$E < 2\pi b + 4(a-b),$$

che si può pure scrivere

$$\frac{E}{2\pi} < \frac{2a + (\pi - 2)b}{2 + (\pi - 2)}.$$

E poichè $\frac{E}{2\pi}$ è il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale a quella dell'ellisse, ricordando quanto si è detto precedentemente, si deduce che il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale a quella dell'ellisse di semiassi a e b è maggiore di $\frac{a+b}{2}$, ed è minore di $b + \frac{4}{2\pi}(a-b) = \frac{2a + (\pi-2)b}{2 + (\pi - 2)}$.

Se in questa seconda formula invece di π si sostituisce $3 < \pi$, si aumenta il valore della frazione, quindi:

Il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale a quella dell'ellisse di semiassi a e b è maggiore di $\frac{a+b}{2}$, ed è minore di $\frac{2a+b}{3}$.

Poichè il raggio r del cerchio la cui lunghezza è eguale a quella dell'ellisse, è, come si è visto, minore di a e maggiore di b, esso si potrà mettere sotto la forma

$$r=\frac{a+zb}{1+z},$$

ove z è una quantità positiva, poichè la frazione $\frac{a+zb}{1+z}$ col variare di z da 0 ad ∞ va decrescendo da a a b, ed assume tutti i valori compresi fra a e b. E poichè si è trovato

$$\frac{a+b}{2}<r<\frac{a+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)b}{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)},$$

si conchiude che i valori di z risultano compresi fra

$$1>z>\frac{\pi}{2}-1=0{,}57029.....$$

Dico che i due limiti or ora trovati, entro cui sta compreso z, sono appunto il limite superiore ed il limite inferiore dei valori di z, sicchè non esistono altri limiti, più prossimi fra di loro, che comprendano i valori di z. Infatti dalla $r=\frac{a+zb}{1+z}$ si ricava

$$z=\frac{a-r}{r-b},$$

e sostituendo

$$r=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt,\quad b=a\sqrt{1-e^2},$$

e sviluppando in serie secondo le potenze ascendenti di e il nume-

ratore e il denominatore, si ha

$$z = \frac{1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1.}{2.4}\right)^2 3e^4 - \ldots\right]}{\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)e^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)3e^4 - \ldots\right] - \left[1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2.4}e^4 - \frac{1.3}{2.4.6}e^6 \ldots\right]}$$

$$z = \frac{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3e^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)5e^4 + \ldots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4}\left(1 - \frac{3}{2.4}\right)e^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(1 - \frac{5}{5.4.6}\right)e^4 + \ldots}$$

Facendo tendere e verso zero, lim $z = 1$; quindi poichè i valori z sono tutti maggiori di 1 e si possono approssimare all'unità quanto si vuole, sarà 1 il limite superiore dei valori di z.

Facciasi invece tendere l'eccentricità e verso 1. Si avrà $\lim r = \frac{2a}{\pi}$ $\lim b = 0$, e $\lim z = \frac{\pi}{2} - 1$. Pertanto i valori di z sono tutti maggiori di $\frac{\pi}{2} - 1$, ma si possono approssimare quanto si vuole a questa quantità; dunque $\frac{\pi}{2} - 1$ è il limite inferiore dei valori di z.

46. Sia la *spirale d'Archimede* di equazione $r = a\,\alpha$. Si avrà $dr = a d\alpha$, e

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2} = a\sqrt{1 + \alpha^2}\, d\alpha;$$

quindi integrando fra i limiti 0 ed α si avrà la lunghezza d'un arco della spirale, di cui un estremo è il polo

$$s = a\int_0^\alpha \sqrt{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2}a\alpha\sqrt{1+\alpha^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}a \log\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right).$$

Siano x e y le coordinate cartesiane ortogonali d'un punto P nel piano, e siano r ed α le coordinate polari d'un altro punto Q; suppongasi che x, y, r, α siano funzioni d'una stessa variabile t, e tali da soddisfare alle equazioni

$$dr = dx, \quad r d\alpha = dy.$$

Detti s ed s' gli archi descritti da P e Q mentre t varia in un intervallo qualunque, si avrà

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \; ds' = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2},$$

ed a causa delle equazioni precedenti $ds = ds'$, e $s = s'$, ossia gli archi corrispondenti delle due curve sono eguali.

Dalle equazioni precedenti, dati x ed y, si possono ricavare r ed α, e viceversa

Facciasi p. e. $y = \frac{x^2}{2p}$, onde $dy = \frac{x\,dx}{p}$. Le equazioni precedenti diventano

$$dr = dx, \quad r\,d\alpha = \frac{x\,dx}{p};$$

la prima equazione è soddisfatta ponendo $r = x$; allora la seconda diventa $d\alpha = \frac{dr}{p}$ la quale è soddisfatta facendo $r = p\alpha$. Quindi le curve $x^2 = 2py$ (parabola conica) e $r = p\alpha$ (spirale d'Archimede) sono tali che se un punto P, di ascissa x, descrive un arco della prima, ed un punto Q di raggio vettore $r = x$ descrive un arco della seconda, i due archi sono eguali in lunghezza.

§ 9. Formule generali per le aree.

47. Teorema. — Se le posizioni dei due punti A e B nel piano sono funzioni d'una stessa variabile numerica

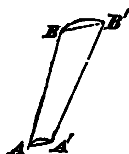
t, aventi per derivate i segmenti $\frac{dA}{dt}$ e $\frac{dB}{dt}$ funzioni continue di t, e se variando t fra t_0 e t_1 la retta finita AB non passa mai due volte per uno stesso punto, allora l'area descritta dalla retta AB è misurata da

$$u = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} AB.\left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}\right) dt,$$

ove $AB.\left(\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}\right)$ indica il numero che misura l'area del parallelogrammo compreso fra segmenti equipollenti ad AB e $\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}$.

Infatti, dati a t i valori t e $t+\Delta t$, siano AB e A′B′ le posizioni corrispondenti della retta mobile, e sia Δu l'area descritta da AB mentre t varia in questo intervallo. Si avrà

$$\Delta u = ABB'A' + \epsilon + \epsilon',$$



ove ABB′A′ rappresenta l'area del quadrilatero di vertici ABB′A′; ϵ è l'area compresa fra l'arco curvilineo AA′ e la sua corda, ed ϵ' l'area compresa fra l'arco BB′ e la sua corda, queste due aree essendo prese positivamente o negativamente secondochè si debbono aggiungere o sottrarre al quadrilatero per avere Δu.

Ora si ha che

$$ABB'A' = \frac{1}{2}\,AB'.BA' = \frac{1}{2}\,(AB + BB').(BA + AA')$$
$$= \frac{1}{2}\,AB.(AA' + BB') + \frac{1}{2}\,AA'.BB';$$

e dividendo per Δt si ha

$$\frac{ABB'A'}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,AB.\left(\frac{AA'}{\Delta t} + \frac{BB'}{\Delta t}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{AA'}{\Delta t}.\frac{BB'}{\Delta t}\Delta t.$$

Facciasi tendere Δt a zero. Poichè

$$\lim \frac{AA'}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}, \quad \lim \frac{BB'}{\Delta t} = \frac{dB}{dt},$$

si avrà

$$\lim \frac{ABB'A'}{\Delta t} = \frac{1}{2} AB \, . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \right).$$

L'area ϵ è minore dell'area del rettangolo di base AA' e di altezza la massima distanza dei punti dell'arco AA' dalla sua corda. Se X è il punto dell'arco AA' per cui la distanza dalla corda è massima, l'area di questo rettangolo vale $AA' . AX$; quindi, in valor assoluto $\epsilon < AA' . AX$, e $\frac{\epsilon}{\Delta t} < \frac{AA'}{\Delta t} . AX$. Facciasi tendere Δt a zero; $\frac{AA'}{\Delta t}$ tende ad un limite finito; ma AX tende a zero, perchè il punto X dell'arco AA' tende ad A; quindi $\lim \frac{\epsilon}{\Delta t} = 0$. Analogamente si dimostra che $\lim \frac{\epsilon'}{\Delta t} = 0$.

Dividendo pertanto l'espressione trovata di Δu per Δt, e passando ai limiti si ha

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} AB \, . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \right),$$

ossia

$$du = \frac{1}{2} AB \, . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \right) dt$$

ed il valore di u, ove t varii nell'intervallo (t_0, t_1) è dato da

$$u = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} AB \, . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \right) dt,$$

c. v. d.

48. Se nella formula precedente si tralasciano i limiti, e invece

di $\frac{dA}{dt}dt$ e $\frac{dB}{dt}dt$ si scrive dA e dB, essa diventa

$$u = \frac{1}{2}\int AB.(dA + dB). \qquad (1)$$

Sia C il punto medio del segmento AB. Essendo O un punto fisso qualunque, si avrà $2OC \equiv OA + OB$, e differenziando $2dC \equiv dA + + dB$. Quindi, sostituendo, la formula precedente diventa

$$u = \int AB.dC. \qquad (2)$$

Si ha $dAB \equiv dB - dA$, da cui $dB \equiv dA + dAB$. Sostituendo nella (1) si ha una terza espressione dell'area

$$u = \int \left(AB.dA + \frac{1}{2}AB.dAB\right). \qquad (3)$$

Le formule precedenti contengono tutte quelle finora trovate. Invero, la retta mobile che descrive l'area u sia l'ordinata MP d'un punto d'una curva. Si avrà $OM \equiv x\mathrm{i}$, $MP \equiv y\mathrm{j}$; $OP \equiv x\mathrm{i} + y\mathrm{j}$; quindi $dOM \equiv dM \equiv \mathrm{i}dx$; $dMP \equiv \mathrm{j}dy$; e sostituendo nella formola (3), che nel nostro caso diventa $u = \int \left(MP.dM + \frac{1}{2}MP.dMP\right)$ si ricava

$$u = \mathrm{j}.\mathrm{i}\int y\,dx.$$

Se i segmenti di riferimento sono eguali all' unità di misura ed ortogonali, cioè la curva è riferita a coordinate cartesiane ortogonali, sarà $\mathrm{j}.\mathrm{i} = 1$, e

$$u = \int y\,dx.$$

Se i segmenti i e j, ancora eguali all'unità di misura, fanno fra

loro l'angolo ω, che è il caso delle coordinate cartesiane oblique, sarà $\mathbf{j} . \mathbf{i} = \operatorname{sen} \omega$, e

$$u = \operatorname{sen} \omega \int y dx.$$

Supposto che x ed y siano ancora le coordinate cartesiane del punto P, la cui posizione dipende da t, detta O l'origine delle coordinate, l'area descritta dalla retta OP sarà data da

$$u = \frac{1}{2}\int \mathrm{OP} . d\mathrm{P},$$

che si ottiene dalla (1) ponendo invece di A, B, dA, dB rispettivamente O, P, O, dP. Ora si ha $\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $d\mathrm{P} \equiv dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ $\mathrm{OP} . d\mathrm{P} = (xdy - ydx)\mathbf{i} . \mathbf{j}$. Quindi sostituendo si ha

$$u = \frac{1}{2}\, \mathbf{i} . \mathbf{j} \int (xdy - ydx);$$

e l'area $\mathbf{i} . \mathbf{j}$ vale l'unità, ovvero sen ω, secondochè gli assi sono ortogonali od obliqui.

Siano r ed α le coordinate polari del punto P, e sia r funzione di α. Detto O il polo, e conservando le notazioni della pagina 80, si avrà

$$\mathrm{OP} \equiv r\mathbf{a}, \qquad d\mathrm{P} \equiv (r\mathbf{a}' + r'\mathbf{a})\, d\alpha;$$

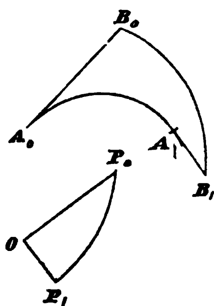
quindi $\mathrm{OP} . d\mathrm{P} = r^2 \mathbf{a} . \mathbf{a}'$, e l'area descritta da OP vale

$$u = \frac{1}{2}\int \mathrm{OP} . d\mathrm{P} = \frac{1}{2}\, \mathbf{a} . \mathbf{a}' \int r^2 d\alpha;$$

ovvero, poichè $\mathbf{a} . \mathbf{a}' = 1$,

$$u = \frac{1}{2}\int r^2\, d\alpha.$$

Se la retta AB si muove in guisa da riuscire sempre tangente in A alla curva descritta dal punto A, sarà $AB . dA = 0$, e l'area u si riduce in virtù della (3), a



$$u = \frac{1}{2} \int AB . dAB;$$

d'altra parte se da un punto fisso O si conduce un segmento variabile $OP \equiv AB$, l'area v descritta da OP sarà data da

$$v = \frac{1}{2} \int OP . dP;$$

ma siccome $OP \equiv AB$, e $dP \equiv dOP \equiv dAB$, si deduce $u = v$, ossia l'area descritta dal segmento AB è eguale all'area descritta dal segmento equipollente OP.

Se la retta AB ha una lunghezza costante l, e si mantiene sempre normale alla curva XY descritta dal suo punto medio C, si avrà

$$AB . dC \equiv l \times \text{gr}. dC,$$

e

$$u = \int AB . dC = l \times \int \text{gr}. dC.$$

Ma $\int \text{gr}. dC$ è la lunghezza dell'arco XY descritto dal punto C. Quindi l'area descritta dal segmento AB è eguale all'area del rettangolo avente per base la lunghezza dell'arco descritto dal punto C e per altezza la lunghezza costante del segmento AB.

49. La posizione d'un punto P nel piano o su d'una superficie può essere data mediante due variabili numeriche, che indicheremo con u e v. Così, nel piano, u e v possono essere le coordinate car-

tesiane, ovvero le coordinate polari del punto P. In generale i due numeri u e v soglionsi chiamare le *coordinate* del punto P nel piano o su quella superficie. Supponiamo sempre che ad ogni coppia di valori u e v, se occorre convenientemente limitate, corrisponda una posizione di P, e che a coppie distinte corrispondano posizioni distinte di P. Attribuendo ad u un valore qualunque, e variando v fra due valori $\theta_0(u)$ e $\theta_1(u)$, che possono dipendere da u, il punto P descrive un arco di curva in quel piano o in quella superficie. Variando poi u fra due valori a e b, questa curva si sposta e descrive un'area. Quest'area si può esprimere con due integrazioni successive, come dimostra la proposizione che segue:

Teorema. — Se la posizione del punto P è funzione delle due variabili numeriche u e v, avente per derivate rispetto a u e a v i segmenti **p** e **q**, funzioni continue di u e v, il luogo dei punti P che corrispondono alle coppie dei valori di u e v che soddisfano alle diseguaglianze

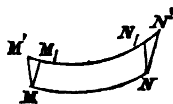
$$a < u < b, \qquad \theta_0(u) < v < \theta_1(u)$$

essendo $\theta_0(u)$ e $\theta_1(u)$ funzioni continue di u, ha un'area misurata da

$$S = \int_a^b du \int_{\theta_0(u)}^{\theta_1(u)} \omega\, dv,$$

ove ω è il numero che misura l'area del parallelogrammo $\mathbf{p}.\mathbf{q}$, cioè $\omega = gr(\mathbf{p}.\mathbf{q}) = gr\,\mathbf{p} \times gr\,\mathbf{q} \times \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}$.

Suppongasi dapprima che il punto P giaccia in un piano fisso. Sia MN una qualunque delle linee descritte da P mentre, attribuendo ad u un valore fisso, v varia da $\theta_0(u)$ a $\theta_1(u)$. Sia M'N' una nuova posizione di questa linea, corrispondente ad un nuovo valore $u + \Delta u$ di u. Dicasi ΔS la porzione dell'area S compresa fra le linee MN ed M'N', cioè l'area descritta da MN mentre



u varia nell'intervallo $(u, u + \Delta u)$. Siano P e P' due punti delle linee MN ed M'N' corrispondenti ad uno stesso valore di v. Variando v fra θ_0 e θ_1, la retta PP' descrive un'area MNN_1M_1, la quale differisce dalla ΔS solo per due triangoli mistilinei MM_1M', e NN_1N' che possono appartenere all'una e non all'altra delle due figure:

$$\Delta S = MNN_1M_1 \pm MM_1M' \pm NN_1N'$$

Ora la prima parte in virtù delle formule dimostrate è espressa da

$$MNN_1M_1 = \frac{1}{2}\int PP' . \left(\frac{dP}{dv} + \frac{dP'}{dv}\right) dv$$

e dividendo per Δu,

$$\frac{MNN_1M_1}{\Delta u} = \frac{1}{2}\int \frac{PP'}{\Delta u} . \left(\frac{dP}{dv} + \frac{dP'}{dv}\right) dv,$$

gli integrali essendo estesi da θ_0 a θ_1. Ora, col tendere di Δu a zero, $\lim \frac{PP'}{\Delta u} \equiv \frac{dP}{du} \equiv \mathbf{p}$; il segmento $\frac{dP}{dv} \equiv \mathbf{q}$; ed il segmento $\frac{dP'}{}$ che è ciò che diventa $\mathbf{q}$, ove ad u si sostituisce $u + \Delta u$, ha per limite $\mathbf{q}$ col tendere di Δu a zero. Quindi, supposto fisso v, si avrà $\lim \frac{1}{2}\frac{PP'}{\Delta u} . \left(\frac{dP}{dv} + \frac{dP'}{dv}\right) = \mathbf{p} . \mathbf{q} = \omega$; inoltre, a causa della continuità di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, il membro di sinistra converge equabilmente verso ω qualunque sia v, ossia, fissata una quantità piccola ad arbitrio, si può supporre Δu così piccolo che la differenza fra il membro di sinistra ed il suo limite ω sia minore di questa quantità, per ogni valore di v. Allora il limite dell'integrale sarà l'integrale del limite, ossia

$$\lim \frac{MNN_1M_1}{\Delta u} = \int \omega \, dv.$$

La figura MM_1M' è minore del rettangolo di base MM_1 e di al-

tezza la massima distanza δ dei punti di MM' da MM_1; quindi $\frac{MM_1M'}{\Delta u} < \frac{MM_1}{\Delta u}\delta$; e, col tendere di Δu a zero, $\frac{MM_1}{\Delta u}$ tende ad un limite, δ tende a zero, perciò

$$\lim \frac{MM_1M'}{\Delta u} = 0.$$

Analogamente

$$\lim \frac{NN_1N'}{\Delta u} = 0.$$

Si divida l'espressione di ΔS per Δu, e si faccia tendere Δu a zero. Poichè sono noti i limiti dei termini in cui è decomposto $\frac{\Delta S}{\Delta u}$, si avrà:

$$\lim \frac{\Delta S}{\Delta u} = \frac{dS}{du} = \int \omega dv,$$

e quindi il valore intero di S, ove u varii nell'intervallo (a, b) sarà dato da

$$S = \int \left(\int \omega \, dv \right) du,$$

quest'ultimo integrale essendo preso fra i limiti (a, b) mentre il primo lo è fra θ_0 e θ_1. Questa è la formula a dimostrarsi.

Suppongasi ora che il punto P, la cui posizione dipende da u e v, si muova su d'una superficie qualunque. Si decomponga questa superficie in parti, e, dopo averle trasportate comunque nello spazio, le si proiettino ortogonalmente su d'un piano fisso π. Detta P' la proiezione del punto P già trasportato, e dette $\mathbf{p}'$ e $\mathbf{q}'$ le derivate parziali di P' rispetto ad u e v, le quali sono le proiezioni dei segmenti $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, già trasportati, e fatto $\omega' = gr\,(\mathbf{p}' . \mathbf{q}')$, il quale

ω' sarà la proiezione dell'area $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ di grandezza ω, l'area S' della proiezione della figura data sarà misurata da $S' = \int du \int \omega' \, dv$; e poichè ω' è minore di ω, si deduce $S' < \int du \int \omega \, dv$; ossia, se si decompone la superficie descritta da P in parti, e, dopo averle trasportate nello spazio, le si proiettano su d'un piano fisso, la somma S' delle proiezioni di queste parti è sempre minore dell'integrale duplicato $\int du \int \omega \, dv$. Si decomponga ora in parti la figura data, in modo che l'angolo che il piano tangente alla superficie (cioè il piano dell'area $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$) fa in due punti di una di queste parti sia minore d'un angolo piccolo ad arbitrio ϵ, cosa possibile a causa della continuità di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. Si trasportino queste parti in guisa che il piano tangente in uno dei loro punti sia parallelo al piano π su cui si proietta. Si avrà $\omega' = \omega \cos(\omega, \omega')$ indicando con $\widehat{\omega, \omega'}$ l'angolo che il piano dell'area ω', cioè il piano π, fa col piano dell'area ω, cioè $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, dopo il trasporto. Allora, siccome per ipotesi $\widehat{\omega, \omega'} < \epsilon$, sarà $\omega' > \omega \cos \epsilon$; quindi

$$S' = \int du \int \omega' \, dv > \cos\epsilon \int du \int \omega \, dv,$$

quantità che si può supporre tanto prossima quanto si vuole a

$$\int du \int \omega \, dv,$$

perchè si può supporre $\cos \epsilon$ differente dall'unità meno d'una quantità comunque piccola.

Dunque, se si decompone la figura descritta da P in parti, e queste, dopo averle trasportate comunque nello spazio, vengono proiettate ortogonalmente su d'uno stesso piano π, la somma S' di queste proiezioni è sempre minore di $\int du \int \omega \, dv$, e vi si può avvicinare quanto si vuole; ossia quest'integrale è il limite superiore di S'.

Ma, per definizione, il limite superiore delle aree S' è l'area S della figura data; quindi

$$S = \int du \int \omega \, dv,$$

c.v.d.

50. Come esempio, comincieremo ad applicare le formule precedenti ad aree piane.

Siano x ed y le coordinate cartesiane del punto P. Detti **i**, **j** i segmenti di riferimento, sarà $OP \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Derivando si ha

$$\frac{dP}{dx} \equiv \mathbf{i}, \qquad \frac{dP}{dy} \equiv \mathbf{j}.$$

L'area $\omega = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ è in questo caso costante; quindi l'area descritta dal punto P mentre le sue coordinate variano entro i limiti

$$a < x < b, \qquad \theta_0(x) < y < \theta_1(x)$$

sarà data da

$$S = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \int_a^b dx \int_{\theta_0(x)}^{\theta_1(x)} dy.$$

Eseguendo il secondo integrale

$$\int_{\theta_0(x)}^{\theta_1(x)} dy = \theta_1(x) - \theta_0(x),$$

si avrà

$$S = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \int_a^b \Big(\theta_1(x) - \theta_0(x)\Big)\, dx,$$

formula che è conseguenza diretta di quelle già dimostrate.

Se r ed α sono le coordinate polari di P, detto $\mathbf{a}$ il segmento eguale all'unità di misura e che fa l'angolo α coll'asse polare, sarà $OP \equiv r\mathbf{a}$; $\frac{dP}{dr} \equiv \mathbf{a}$, $\frac{dP}{d\alpha} \equiv r\,\mathbf{a}'$; $\omega = r\,\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}'$, e siccome $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}' = 1$, sarà $\omega = r$; quindi l'area descritta da P è data da

$$\int\int r\,dr\,d\alpha,$$

gl'integrali essendo presi entro limiti convenienti.

§ 10. Calcolo di alcune aree non piane.

51. Cilindri. — La posizione del punto A sia funzione d'una variabile u. Variando u, il punto A descriverà una curva qualunque, piana o non. Per ogni posizione di A si conduca una retta parallela ad una retta fissa l. Il luogo di queste rette sarà una superficie cilindrica.

Sia $\mathbf{a}$ un segmento fisso parallelo alle generatrici del cilindro. Detto P un punto della generatrice che passa per A, il segmento AP avrà la direzione di $\mathbf{a}$; quindi esisterà un numero v tale che

$$AP \equiv v\mathbf{a}.$$

Variando v, il punto P descrive la generatrice che passa per A. In tal modo la posizione d'un punto qualunque P sul cilindro è determinata dai due numeri u e v; il primo determina la generatrice su cui il punto si trova, e il secondo la posizione del medesimo sulla generatrice.

Supposto u fisso e variabile v, derivando l'equipollenza precedente si avrà

$$\frac{dP}{dv} \equiv \mathbf{a}\,;$$

supposto invece v fisso e variabile u si avrà

$$\frac{dP}{du} - \frac{dA}{du} \equiv 0,$$

ossia

$$\frac{dP}{du} \equiv \frac{dA}{du}.$$

Quindi

$$\omega = \mathrm{gr}\left(\frac{dP}{du} \cdot \frac{dP}{dv}\right) = \mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du} \quad \mathbf{a}\right),$$

e l'area d'una porzione del cilindro sarà data da

$$S = \int\int \mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du} . \mathbf{a}\right) du\, dv,$$

l'integrale essendo esteso a limiti convenienti. Delle due integrazioni indicate, quella rispetto a v si eseguisce subito, perchè la funzione da integrarsi è indipendente da v. Se v_0 e v_1 sono i limiti entro cui varia v, i quali possono dipendere da u, si avrà

$$S = \int \mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du} . \mathbf{a}\right) (v_1 - v_0)\, du.$$

Merita menzione speciale il caso in cui la linea descritta dal punto A è una sezione fatta nella superficie cilindrica con un piano normale alle generatrici. Supposto ancora che l'area a determinarsi sia quella generata da una porzione AP di generatrice, di cui un estremo è il punto A, l'area del parallelogrammo $\frac{dA}{du} . \mathbf{a}$ sarà data da

$$\mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du} . \mathbf{a}\right) = \mathrm{gr}\,\frac{dA}{du} \times \mathrm{gr}\,\mathbf{a},$$

perchè l'angolo dei segmenti $\frac{dA}{du}$ e $\mathbf{a}$ è retto. I limiti v_0 e v_1 sono

rispettivamente 0 e il valore di v corrispondente all'estremo P di AP, il quale valore indicheremo semplicemente con v. Quindi in questo caso

$$S = \int \mathrm{gr} \frac{dA}{du} \times \mathrm{gr}\,\mathbf{a} \times v du.$$

Ma poichè $AP \equiv v\mathbf{a}$, sarà $\mathrm{gr}\, AP = v \,\mathrm{gr}\, \mathbf{a}$; quindi posto $h = \mathrm{gr}\, AP$, ossia detto h la lunghezza del segmento mobile AP, si avrà

$$S = \int \mathrm{gr} \frac{dA}{du} \cdot h\, du;$$

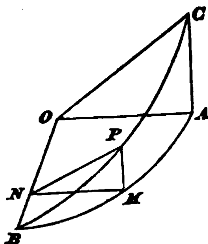
ovvero ancora, detto s l'arco di curva descritto da A, sarà

$$\mathrm{gr} \frac{dA}{du} du = ds,$$

e quindi

$$S = \int h\, ds.$$

Esempio. — Un cilindro di rivoluzione, la cui base è il cerchio OAB, è tagliato con un piano OBC passante pel centro O della base. Trovare l'area della superficie cilindrica compresa fra questo piano e la base (cioè il doppio del triangolo mistilineo ABC).



Sia a il raggio OA, e α l'angolo diedro dei due piani AOB e COB, che è misurato dall'angolo piano AOC. Detta s la lunghezza dell'arco AM che va dal punto A al punto variabile M della base, sarà l'angolo $AOM = \frac{s}{a}$; la distanza di M da OB, che diremo MN, sarà espressa da $a \cos \frac{s}{a}$; e dal triangolo MNP si ricava che

$MP = a \cos \frac{s}{a} \operatorname{tang} \alpha$. Questa è la lunghezza del segmento mobile MP, che prima si era chiamata h. Variando s fra 0 e $\frac{\pi}{2} a$, il punto M va da A in B, ed MP descrive il triangolo mistilineo ABC. Si avrà quindi

$$ABC = \int_0^{\frac{\pi}{2}a} a \cos \frac{s}{a} \operatorname{tang} \alpha \, ds = a \operatorname{tang} \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}a} a \cos \frac{s}{a} \, ds = a^2 \operatorname{tang} \alpha.$$

Ma l'area del triangolo $OAC = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tang} \alpha$; quindi l'area della figura ABC è il doppio dell'area del triangolo OAC, sua proiezione sul piano OAC.

52. Coni. — Sia O un punto fisso, ed M un punto variabile, la cui posizione è funzione d'una variabile numerica u. Variando M la retta OM descrive una superficie conica, avente per vertice O, che contiene la curva descritta da M.

Sia P un punto qualunque della generatrice OM. Si potrà determinare un numero v in guisa che

$$OP \equiv v OM.$$

Così la posizione di P sulla superficie risulta determinata mediante due numeri u e v; il primo determina la generatrice su cui si trova P, il secondo la posizione di P sulla generatrice. Derivando l'equipollenza precedente rispetto ad u e v si ha

$$\frac{dP}{du} \equiv v \frac{dM}{du}, \qquad \frac{dP}{dv} \equiv OM;$$

quindi

$$\omega = \operatorname{gr} \left(\frac{dP}{du} \cdot \frac{dP}{dv} \right) = \operatorname{gr} \left(v \frac{dM}{du} \cdot OM \right),$$

e la superficie S descritta da P, mentre u e v variano entro certi limiti è data da

$$S = \int\int \text{gr}\left(v\,\frac{dM}{du}\,.\,OM\right) du\,dv.$$

L'integrazione rispetto a v si può eseguire immediatamente.

Supponendo di voler considerare l'area descritta dal segmento OM, v dovrà variare da 0 ad 1; quindi

$$\int_0^1 \text{gr}\left(v\,\frac{dM}{du}\,.\,OM\right) dv = \text{gr}\left(\frac{dM}{du}\,.\,OM\right)\int_0^1 v\,dv =$$

$$\frac{1}{2}\,\text{gr}\left(\frac{dM}{du}\,.\,OM\right);$$

perciò, sostituendo

$$S = \frac{1}{2}\int \text{gr}\left(\frac{dM}{du}\,.\,OM\right) du.$$

Come esempio, se si suppone che OM sia di lunghezza costante r, e quindi che M si muova su d'una sfera di centro O e di raggio r, la direzione di $\frac{dM}{du}$, che è tangente alla sfera, sarà normale al raggio OM; quindi

$$\text{gr}\left(\frac{dM}{du}.OM\right) = r\,\text{gr}\,\frac{dM}{du};$$

sostituendo, si avrà

$$S = \frac{1}{2}\,r\int \text{gr}\,\frac{dM}{du}\,du.$$

Ma il secondo integrale rappresenta la lunghezza dell'arco di curva sferica descritta da M; quindi l'area della superficie conica

limitata da una sfera di centro il vertice del cono è eguale all'area del triangolo avente per base la lunghezza della linea intersezione della sfera col cono, e per altezza il raggio della sfera.

53. Sfera. — La posizione d'un punto P su d'una sfera di raggio r si può determinare mediante le sue coordinate geografiche, cioè mediante l'angolo θ che il raggio OP fa col piano d'un cerchio massimo fisso (equatore), il quale angolo dicesi latitudine, e mediante l'angolo diedro φ che il piano che proietta OP sul piano dell'equatore fa con un piano fisso (primo meridiano), al qual angolo si dà il nome di longitudine. Il luogo dei punti corrispondenti ad uno stesso valore di θ è un *parallelo*, il luogo di quelli corrispondenti ad uno stesso valore di φ è un *meridiano*.

Già si è visto (pag. 109) che la derivata del punto P rispetto a θ è un segmento tangente al meridiano passante per P ed eguale in grandezza ad r; e che la derivata di P rispetto a φ è un segmento tangente al parallelo passante per P ed eguale in grandezza ad $r \cos \theta$. Quindi l'area ω del rettangolo compreso fra queste due derivate sarà

$$\omega = r^2 \cos \theta,$$

e l'area d'una porzione qualunque di sfera sarà espressa da

$$S = r^2 \int\int \cos \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Delle due integrazioni indicate, la prima, sia rispetto a θ che rispetto a φ, si può eseguire immediatamente.

Se, per esempio, si fa variare θ da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, e φ da 0 a 2π, il punto P descrive l'intera sfera, e si avrà

$$S = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2.$$

Si consideri ancora la porzione di superficie sferica descritta dal punto P, ove φ varii da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e θ da 0 a φ. L'area di questa figura sarà data da

$$S = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\varphi} \cos\theta \, d\theta = r^2,$$

ossia vale il quadrato del raggio.

54. *Superficie di rivoluzione.* — Sia l una linea data comunque nello spazio. La posizione d'un punto di questa linea sia data in funzione d'una variabile u. Se questa linea ruota attorno ad un asse fisso OX, genererà una superficie di rivoluzione. Dicasi α l'angolo di cui è ruotata la linea per passare da una sua posizione iniziale ad una posiziene qualunque. Allora la posizione d'un punto P su questa superficie è data dai due numeri u e α; il secondo determina la posizione della generatrice che passa per P, e il primo la posizione del punto su questa generatrice. Se α è fisso e varia u, il punto descrive una generatrice; se u è fisso e varia α, il punto descrive un *parallelo*, cioè un cerchio contenuto in un piano normale all'asse di rotazione, ed il cui centro sta su quest'asse. Sia $\frac{dP}{du}$ la derivata del punto P rispetto ad u, che sarà un segmento tangente alla generatrice passante per P. La derivata di p rispetto ad α sarà un segmento eguale in grandezza alla distanza di P da OX, e tangente al parallelo passante per P. Quindi si potrà calcolare l'area ω compresa fra queste due derivate e, integrando, determinare l'area cercata.

Se la linea che ruota è contenuta in un piano passante per l'asse di rivoluzione OX, ossia se è un meridiano della superficie, cosa che si può sempre supporre senza ledere alla generalità della superficie, allora, detta y la distanza del punto P da OX, sarà

$$\omega = y \operatorname{gr} \frac{dP}{du},$$

e

$$S = \int\int y \operatorname{gr} \frac{dP}{du} du\, d\alpha;$$

l'integrazione rispetto ad α si può eseguire immediatamente. Se si suppone che α varii fra 0 e 2π, ossia si vuol determinare l'area descritta dall'arco AB di curva in una intera rivoluzione, poichè $\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi$; si avrà

$$S = 2\pi \int y \operatorname{gr} \frac{dP}{du} du.$$

Si osservi ancora che, detto s un arco di meridiano AB, si ha

$$\operatorname{gr} \frac{dP}{du} du = ds;$$

quindi la formola precedente si può pure scrivere

$$S = 2\pi \int y\, ds.$$

Applicheremo questa formula ad alcuni casi particolari.

Sia $y^2 = 2px$ l'equazione d'una parabola conica riferita all'asse e alla tangente nel vertice. Prendendo la y come variabile indipendente, si è trovato pel differenziale dell'arco di parabola

$$ds = \frac{1}{p} \sqrt{y^2 + p^2}\, dy;$$

quindi l'area descritta da un arco di parabola di cui un estremo è il vertice e l'altro estremo è un punto di ordinata y, ove questo arco ruoti attorno all'asse della parabola, è dato da

$$S = 2\pi \int_0^y y\, ds = \frac{2\pi}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + p^2}\, y dy,$$

ossia, eseguito il calcolo,

$$S=\frac{2}{3}\pi\left[(y^2+p^2)\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}-p^2\right];$$

e se alla variabile y si sostituisce la x si avrà

$$S=\frac{2}{3}\pi\left[(2x+p)\sqrt{p(2x+p)}-p^2\right].$$

Si è visto che se si fa $x=a\,\mathrm{sen}\,t$, $y=b\cos t$, variando t, il punto le cui coordinate cartesiane ortogonali sono x ed y descrive un'ellisse, i cui semiassi, diretti secondo gli assi coordinati, sono a e b; e si è trovato pel differenziale dell'arco di ellisse

$$ds=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\;dt.$$

Quindi, sostituendo nell'espressione di S, si avrà

$$S=2\pi\int\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\;b\cos t\;dt.$$

Se si prende l'integrale entro i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, e si raddoppia il risultato, si avrà per area totale dell'ellissoide di rivoluzione

$$S=4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,\cos t\;dt.$$

Per eseguire quest'integrale converrà distinguere i tre casi di

$$a=b,\ a>b \text{ e } a<b.$$

Se $a=b$,

$$\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\,\mathrm{sen}^2\,t}=a,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\;dt=1,$$

e quindi si ha per la superficie della sfera di raggio a

$$S = 4\pi a^2.$$

Se $a > b$ (ellissoide allungato), si ha, sostituendo $1 - \text{sen}^2 t$ invece di $\cos^2 t$, e fatto $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$,

$$S = 4\pi a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \,\text{sen}^2 t}\, \cos t \, dt$$

Ora, fatto $e \,\text{sen}\, t = z$, si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \,\text{sen}^2 t}\, \cos t\, dt = \frac{1}{e} \int_0^e \sqrt{1 - z^2}\, dz =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{2e} \text{arc sen}\, e;$$

ossia

$$S = 2\pi ab \left[\sqrt{1 - e^2} + \frac{\text{arc sen}\, e}{e} \right].$$

Se $a < b$ (ellissoide schiacciato), si avrà in modo analogo

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}.$$

Esercizii.

1. Calcolare l'area descritta dall'ordinata della *sinusoide*

$$y = b \,\text{sen}\, \frac{x}{a}.$$

2. Costrurre un arco di ellisse eguale ad un dato arco di sinusoide.

3. Nella *catenaria*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

l'area descritta dall'ordinata è proporzionata all'arco.

4. Calcolare l'area della *concoide di Nicomede* (pag. 85).

5. Calcolare l'area della *lumaca di Pascal* (pag. 85).

6. Costrurre un arco di ellisse eguale ad un dato arco della curva precedente.

7. Se nella curva precedente si suppone che il segmento costante che si porta sia eguale al diametro del cerchio ($h = 2a$), la curva che ne risulta dicesi *cardioide*. Essa è rettificabile, e la sua lunghezza totale vale 8 volte il diametro del cerchio.

8. La *cardioide*, rotando attorno al suo asse, genera un solido il cui volume vale 16 volte il volume della sfera descritta dal cerchio.

9. L'area della superficie che limita questo volume vale $\frac{32}{5}$ dell'area della sfera descritta dal cerchio.

10. Se, nel piano, da un punto fisso O si conduce una retta che incontra due linee l_1 ed l_2 nei punti P_1 e P_2 (V. pagg. 86, 87); e si costruiscono su questa retta il punto Q tale che $OQ = \sqrt{OP_1 \times OP_2}$, ed il punto R tale che

$$OR = m_1 OP_1 + m_2 OP_2,$$

dette A_1, A_2, B, S le aree descritte dai raggi vettori OP_1, OP_2, OQ, OR, sarà

$$S = m_1^2 A_1 + m_2^2 A_2 + 2 m_1 m_2 B.$$

11. L'area interna della figura limitata dalla *cissoide* indefinita (pag. 86) e dal suo assintoto l_1, vale a dire il limite superiore delle aree poligonali comprese nell'interno di questa figura indefinita, vale tre volte l'area del cerchio l_2.

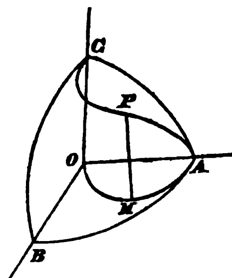
12. La figura precedente rotando attorno all'assintoto l_1 genera un solido, il cui volume interno vale $\frac{1}{4}\pi^2 a^3$, a essendo il diametro del cerchio.

13. L'area limitata da un arco di parabola e dalla sua corda vale i $\frac{2}{3}$ dell'area del triangolo formato da questa corda e dalle tangenti nelle estremità dell'arco.

14. Il volume limitato dalla superficie d'un paraboloide ellittico e da un piano

segante qualunque è la metà del volume del cilindro avente per base l'ellisse sezione di questo piano col paraboloide e per altezza la distanza fra questo piano segante ed il suo parallelo tangente alla superficie.

15. Si ha una sfera OABC di raggio a, ed un cilindro di rivoluzione di cui una generatrice OC passa pel centro della sfera ed avente per diametro il raggio OA della sfera. La lunghezza della curva APC intersezione delle due superficie è eguale al perimetro dell'ellisse di semiassi $a\sqrt{2}$ e a.



16. L'area della porzione di superficie cilindrica interna alla sfera vale il quadrato del diametro della sfera.

17. Se si immagina un secondo cilindro simmetrico del primo rispetto al piano COB, tangente al primo secondo la generatrice OC, l'area della superficie sferica, esterna ai due cilindri, vale 2 volte il quadrato del diametro della sfera (V. pag. 254).

18. Il volume della porzione di sfera esterna ai due cilindri vale i $\frac{2}{9}$ del cubo del diametro della sfera.

CAPITOLO VI.

Della Curvatura.

---

§ 1. Curve piane.

1. Diremo che, in un piano fisso, un cerchio variabile ha per limite un cerchio fisso, se il centro ed il raggio del cerchio variabile hanno rispettivamente per limiti il centro ed il raggio del cerchio fisso.

Dicesi *cerchio osculatore* ad una curva in un suo punto P il limite del cerchio passante per tre punti della curva, i quali tendano al punto P.

Teorema. — Se nel piano il punto P, la cui posizione è funzione della variabile t, ha per derivate prima e seconda i segmenti **u** e **v**, funzioni continue di t, non nulli e non coincidenti in direzione, il centro C e il raggio R del cerchio osculatore alla curva nel punto P sono definiti dalle equazioni:

$$\overline{CP}^2 - R^2 = 0$$

$$CP \times \mathbf{u} = 0$$

$$CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 = 0.$$

Infatti, dati a t tre valori t_1 t_2 t_3 e detti P_1 P_2 P_3 i punti corri-

spondenti della curva, siano C il centro e R il raggio del cerchio passante per essi. Pongasi

$$F(t) = CP^2 - R^2.$$

Sarà F(t) una funzione di t positiva, o nulla, o negativa, secondochè il punto P è esterno, o sopra, o interno al cerchio di centro C e di raggio R. Derivando si ha

$$\frac{1}{2} F'(t) = CP \times \mathbf{u}, \qquad \frac{1}{2} F''(t) = CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2.$$

Ora, poichè i punti P_1 P_2 P_3 stanno sul cerchio, sarà

$$F(t_1) = 0, \quad F(t_2) = 0, \quad F(t_3) = 0.$$

Quindi, pel teorema di Rolle, esisteranno due valori t' e t'' medii fra t_1 t_2 t_3 per cui $F'(t') = 0$ e $F'(t'') = 0$, ed un valore t''' compreso fra i precedenti, per cui

$$F''(t''') = 0.$$

Si passi al limite, facendo tendere t_1 t_2 t_3 verso uno stesso valore t. Le equazioni $F(t_1) = F(t_2) = F(t_3) = F'(t') = F'(t'') = F''(t''') = 0$, cui soddisfanno il centro C e il raggio R del cerchio considerato, diventano

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0,$$

cui debbono soddisfare i limiti di C ed R, cioè il centro ed il raggio del cerchio osculatore. Queste sono le tre equazioni che si volevano dimostrare.

Corollario I. — Le equazioni precedenti sono facili ad interpretarsi. La prima dice che $R = gr\, PC$. La seconda $CP \times \mathbf{u} = 0$, dice che il centro C del cerchio osculatore è sulla normale alla curva.

La terza $CP \times v + u^2 = 0$, che si può scrivere $PC \times v = u^2$, dice anzitutto che il segmento PC fa un angolo acuto con **v**, ossia che PC è rivolto verso la concavità della curva. Inoltre, detta v_n la proiezione di **v** sulla normale, l'equazione precedente diventa

$$gr\,PC\,gr\,v_n = (gr\,u)^2$$

da cui

$$gr\,PC = R = \frac{gr u^2}{gr v_n}$$

ossia il raggio del cerchio osculatore è terza proporzionale dopo la derivata prima e la proiezione della derivata seconda sulla normale.

Corollario II. — Il centro del cerchio osculatore ad una curva piana in un suo punto P è il limite del punto d'incontro delle normali alla curva in due suoi punti, i quali tendano a P. Infatti, pongasi

$$f(t) = CP \times u$$

sarà

$$f'(t) = CP \times v + u^2.$$

Se il punto C è il punto d'incontro delle normali alla curva in due suoi punti, corrispondenti ai valori t_1 e t_2 di t, sarà

$$f(t_1) = 0, \quad f(t_2) = 0;$$

quindi per un valore t medio fra t_1 e t_2 sarà $f'(t') = 0$.

Passando al limite le equazioni $f(t_1) = 0$, $f(t_2) = 0$, $f'(t') = 0$ diventano

$$f(t) = 0, \quad f'(t) = 0$$

ossia

$$CP \times u = 0, \quad CP \times v + u^2 = 0$$

che sono appunto le equazioni che determinano il centro del cerchio osculatore.

2. Dalle cose dette potremo facilmente dedurre il modo di comportarsi della curva piana descritta dal punto P rispetto ad ogni cerchio passante per un punto P_0 di quella curva. Siano O ed R il centro ed il raggio di quel cerchio, e facciasi

$$F(t) = \overline{OP}^2 - R^2.$$

$F(t)$ è una funzione di t, perchè P dipende da t, la quale sarà positiva o nulla o negativa secondochè P è esterno o sopra o interno al cerchio considerato. Differenziando si ha

$$\frac{1}{2} F'(t) = OP \times \mathbf{u}$$

$$\frac{1}{2} F''(t) = OP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2$$

$$\frac{1}{2} F'''(t) = OP \times \mathbf{u} + 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Fatto $t = t_0$, il punto P viene in P_0, che è un punto del cerchio; quindi sarà $F(t_0) = 0$. Ora, se il centro O del cerchio non sta sulla normale alla curva, sarà $F'(t) \lesssim 0$. Quindi la funzione $F(t)$, che per $t = t_0$ è nulla, e che ha derivata non nulla, cambia di segno quando t passa da valori minori a valori maggiori di t_0; perciò il punto P passa dall'interno all'esterno del cerchio, o viceversa, ossia la curva taglia il cerchio.

Se invece il centro O sta sulla normale alla curva, sarà per $t = t_0$, $F(t) = 0$, $F'(t) = 0$.

Se C è il centro del cerchio osculatore, sarà $CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 = 0$; quindi, sottraendo da $F''(t)$, si ricava

$$\frac{1}{2} F''(t) = OC \times \mathbf{v}.$$

Ora, se C non coincide con O, e se il segmento OC è diretto secondo

la concavità della curva, sara $F''(t) > 0$. Quindi la funzione $F(t)$, che per $t = t_0$ si annulla insieme alla derivata prima, e la cui derivata seconda è positiva, conserva il segno costante positivo nelle vicinanze di $t = t_0$, ed il punto P, nelle vicinanze di P_0, è sempre esterno al cerchio. Adunque la curva tocca esternamente tutti i cerchi, i cui centri O stanno sulla normale alla curva, e per i quali il segmento OC è rivolto verso la concavità della curva.

Se invece il segmento OC è rivolto verso la convessità della curva, sarà per $t = t_0$, $F(t)=0$, $F'(t)=0$, $F''(t)<0$; quindi $F(t)$ è negativa, nelle vicinanze di t_0, e la curva è, nelle vicinanze di P_0, interna al cerchio.

Se infine il punto O coincide con C, ossia se il cerchio considerato è il cerchio osculatore, sarà $F(t) = 0$, $F'(t) = 0$, $F''(t) = 0$, e occorrerà considerare la derivata terza

$$\frac{1}{2} F'''(t) = CP \times \mathbf{u} + 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Se questa non è nulla, $F(t)$ cambia di segno nelle vicinanze di $t = t_0$, e la curva taglia il cerchio osculatore.

3. Possiamo arrivare alla considerazione dello stesso cerchio partendo da concetti alquanto differenti.

Dicesi *curvatura assoluta* d'un arco di curva piana AB l'angolo che fanno fra loro le tangenti (o le normali) all'arco nei suoi estremi A e B. Per ben definire quest'angolo converrà immaginare un punto qualunque P dell'arco AB, e la tangente in questo punto alla curva; conducasi da un punto fisso O la parallela a questa tangente; mentre il punto P varia e descrive tutto l'arco AB, questa parallela ruoterà attorno ad O, e descriverà un angolo che sarà la curvatura dell'arco AB. La curvatura d'un arco può superare π, ed anche 2π.

Se si scompone un arco in parti, la curvatura assoluta dell'arco è la somma delle curvature delle sue parti; quindi la curvatura d'un arco è funzione distributiva dell'arco stesso.

Il rapporto della curvatura assoluta d'un arco AB alla sua lunghezza dicesi *curvatura media* di quell'arco.

Il limite della curvatura media d'un arco $P_1 P_2$ di curva, ove i punti P_1 e P_2 tendano ad uno stesso punto P dicesi *curvatura della curva* in quel punto.

La curvatura d'una curva in un suo punto vale il reciproco del raggio del cerchio osculatore in quel punto. Invero, detti P_1 e P_2 due punti della curva, C il punto d'incontro delle normali in questi punti, Δs la lunghezza dell'arco PP′, e $\Delta\tau$ la curvatura di quest'arco, che è eguale all'angolo P_1CP_2 che fanno le due normali negli estremi dell'arco, si ricava dal triangolo P_1CP_2 che

$$\frac{\operatorname{sen}\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{\operatorname{sen} CP_2 P_1}{CP_1}.$$

Ora la curvatura media dell'arco P_1P_2 si può mettere sotto la forma

$$\frac{\Delta\tau}{P_1P_2}=\frac{\operatorname{sen}\Delta\tau}{P_1P_2}\times\frac{\Delta\tau}{\operatorname{sen}\Delta\tau}\times\frac{P_1P_2}{\Delta s}.$$

Si passi al limite, facendo tendere P_1 e P_2 verso lo stesso punto P. L'angolo CP_2P_1 ha per limite $\frac{\pi}{2}$; il punto C ha per limite il centro del cerchio osculatore, ed il segmento CP_1 il raggio R dello stesso cerchio P. Quindi $\lim\frac{\operatorname{sen}\Delta\tau}{P_1P_1}=\frac{1}{R}$. Nella seconda formula si ha poi

$$\lim\frac{\Delta\tau}{\operatorname{sen}\Delta\tau}=1,\quad \lim\frac{P_1P_2}{\Delta s}=1$$

e perciò

$$\lim\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{1}{R}$$

e siccome il limite di $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ è appunto la curvatura della curva in P, si deduce la proposizione a dimostrarsi.

Indicheremo la curvatura della curva in P, cioè il limite di $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ con $\frac{d\tau}{ds}$; quindi la formula precedente diventa

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{R}$$

da cui si ricava anche $d\tau=\frac{ds}{R}$; $\tau=\int\frac{ds}{R}$.

Il cerchio osculatore ad una curva dicesi anche *cerchio di curvatura*, il suo centro ed il suo raggio diconsi anche centro e raggio di curvatura.

4. I centri di curvatura corrispondenti ai varii punti d'una curva piana formano in generale una nuova curva che dicesi *evoluta* della curva data; questa poi dicesi *evolvente* della sua evoluta.

Come si è visto, il centro C ed il raggio R del cerchio osculatore sono definiti dalle equazioni

$$\overline{CP}^2-R^2=0,\quad CP\times\mathbf{u}=0,\quad CP\times\mathbf{v}+\mathbf{u}^2=0.$$

Facciasi variare t; varieranno P, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, C ed R; dette $\frac{dC}{dt}$ e $\frac{dR}{dt}$ le derivate del punto C e del numero R, differenziando le equazioni precedenti si trova

$$CP\times\left(\mathbf{u}-\frac{dC}{dt}\right)-R\frac{dR}{dt}=0,\quad CP\times\mathbf{v}+\left(\mathbf{u}-\frac{dC}{dt}\right)\times\mathbf{u}=0,$$

$$CP\times\mathbf{w}+3\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\frac{dC}{dt}\times\mathbf{v}=0.$$

Se dalla prima e seconda di queste equazioni si sottraggono la seconda e terza delle precedenti, si ottiene

$$CP\times\frac{dC}{dt}+R\frac{dR}{dt}=0,\quad \frac{dC}{dt}\times\mathbf{u}=0.$$

La seconda di queste equazioni dice che $\frac{dC}{dt}$ è normale ad **u**, ossia, siccome le direzioni di **u** e di $\frac{dC}{dt}$ sono le direzioni delle tangenti alla curva data e all'evoluta, si deduce che la tangente all'evoluta nel suo punto C è la normale alla curva data nel punto corrispondente P.

La prima equazione si può scrivere $PC \times \frac{dC}{dt} = R\frac{dR}{dt}$; ora i segmenti PC e $\frac{dC}{dt}$ hanno la stessa direzione, ma possono avere lo stesso verso, o verso opposto; quindi $PC \times \frac{dC}{dt} = \pm gr\, PC. gr\, \frac{dC}{dt}$ dovendosi prendere il segno + nel primo caso, ed il — nel secondo. Si sostituisca nella formula precedente, osservando che $gr\, PC = R$, e si divida per R. Si avrà

$$gr\, \frac{dC}{dt} = \pm \frac{dR}{dt}.$$

Si moltiplichi per dt e si integri entro due valori t_0 e t_1. Supposto che per tutti i valori considerati di t si debba sempre prendere o il segno superiore o il segno inferiore, il che avverrà se il raggio di curvatura R va sempre crescendo, ovvero sempre decrescendo, si dedurrà

$$\int_{t_0}^{t_1} gr\, \frac{dC}{dt}\, dt = \pm \int_{t_0}^{t_1} \frac{dR}{dt}\, dt.$$

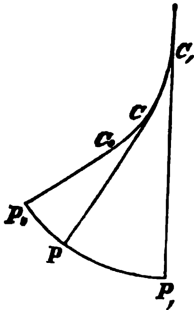
Ma il primo integrale rappresenta la lunghezza dell'arco descritto dal punto C, e che indicheremo con σ. Detti R_0 e R_1 i valori di R corrispondenti ai valori t_0 e t_1 di t, si avrà $\int_{t_0}^{t_1} \frac{dR}{dt} dt = R_1 - R_0$, quindi

$$\sigma = \pm (R_1 - R_0)$$

ossia:

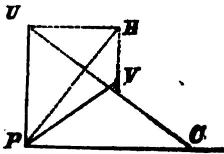
Se, mentre il punto P si muove su d'un arco P_0P_1 di curva

piana, il centro di curvatura C descrive l'arco C_0C_1 di evoluta, in guisa che il raggio di curvatura CP vada sempre crescendo, ovvero sempre decrescendo, allora la lunghezza dell'arco C_0C_1 è eguale al valor assoluto della differenza dei due raggi di curvatura C_0P_0 e C_1P_1 corrispondenti agli estremi dell'arco considerato.



Di qui si scorge la ragione del nome *evoluta* dato alla curva C_0C_1. Supposto invero, come nella figura, che il raggio di curvatura vada sempre crescendo da P_0 a P_1, preso un punto qualunque P della curva, si ha $\widehat{CC_1} = C_1P_1 - CP$, ossia $PC + CC_1 = P_1C_1$. Quindi se si immagina un filo inestensibile di cui un estremo fisso sia C_1 e la cui lunghezza sia C_1P_1, e lo si dispone in modo che una sua parte C_1C si avvolga sulla evoluta e l'altra CP sia sulla tangente alla evoluta in C, il punto P sarà un punto dell'arco P_0P_1; e, variando il punto C su CC_1, P descriverà l'arco di curva data P_0P_1.

5. Dalle proposizioni dimostrate si deduce che, se del punto P che descrive la curva si conoscono le derivate prima e seconda, la costruzione del centro di curvatura non presenta alcuna difficoltà. Una costruzione assai semplice è la seguente:



Siano PU e PV le derivate prima e seconda del punto P. Si conduca da V la parallela a PU, e da U la $UH \perp PU$, che incontri questa parallela in H. Si unisca P con H, e da U si abbassi la perpendicolare alla PH; questa incontrerà la normale alla curva in un punto C che sarà il centro di curvatura cercato.

Infatti dai due triangoli simili PUH, CPU si ricava

$$UH : PU = PU : PC$$

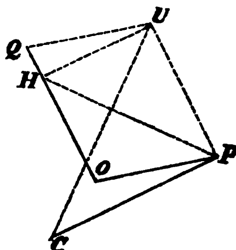
il che dice appunto che PC è la terza proporzionale dopo PV, deri-

vata prima del punto P, e UH, che è la proiezione della derivata seconda sulla normale.

Come esempio, applicheremo la costruzione precedente all'ellisse. È noto che se un punto P descrive una circonferenza di cerchio di centro O, e si prende per variabile l'angolo α che il raggio OP fa con un raggio fisso OX, la derivata prima del punto P è il raggio OQ che fa con OP un angolo retto, e la derivata seconda è un raggio che fa con OQ un angolo retto, e che perciò è in direzione opposta ad OP.

Si proietti ortogonalmente questa figura su d'un piano. Dette ancora O, P, Q le proiezioni dei punti del cerchio indicati colle stesse lettere, il punto P descriverà un'ellisse, di cui OP e OQ sono due semidiametri coniugati, e le derivate del punto P sono OQ e — OP. Quindi la seguente costruzione:

Si costruisca il parallelogrammo OPUQ sopra OP e OQ; da U si abbassi la UH ⊥ OQ; si segni la PH, e da U la perpendicolare a PH, che incontrerà la normale alla curva (cioè la perpendicolare in P a PU) nel centro di curvatura C.



La costruzione precedente si semplifica se P è un vertice A dell'ellisse. Si costruisca allora il rettangolo OAUB sui due semiassi; si conduca la AB, e da U la ⊥ ad AB; questa incontrerà l'asse OA nel centro di curvatura corrispondente ad A, e, per la stessa ragione, incontrerà OB nel centro di curvatura corrispondente a B.

6. Come si è visto, le equazioni che determinano il centro ed il raggio del cerchio osculatore, ove si ponga

$$(1) \qquad F(t) = \overline{CP}^2 - R^2$$

sono

$$(2) \qquad F(t) = 0 \quad F'(t) = 0 \quad F''(t) = 0,$$

ovvero, sviluppando, colla notazione dei segmenti

$$(3) \qquad \overline{CP}^2 - R^2 = 0 \quad PC \times u = 0 \quad PC \times v = u^2.$$

Detta $\mathbf{v}_n$ la proiezione di $\mathbf{v}$ sulla normale alla curva, si è trovato

$$(4) \qquad R = \frac{(gr\,\mathbf{u})^2}{gr\,\mathbf{v}_n}.$$

Si moltiplichino il numeratore e il denominatore di questa frazione per $gr\,\mathbf{u}$. Osservando che $gr\,\mathbf{u} \,.\, gr\,\mathbf{v}_n$ misura l'area del parallelogrammo $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}$, la cui base è appunto $\mathbf{u}$, e la cui altezza è $\mathbf{v}_n$, la formula precedente diventa

$$(5) \qquad R = \frac{(gr\,\mathbf{u})^3}{gr\,\mathbf{u}.\mathbf{v}}.$$

Se x ed y sono le coordinate cartesiane ortogonali del punto P, dette α e β quelle del centro di curvatura C, si avrà

$$F(t) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2$$

e le equazioni (2), $F(t)=0$, $F'(t)=0$, $F''(t)=0$ diventano

$$(6) \qquad \begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \\ (x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0 \\ (x-\alpha)d^2x + (y-\beta)d^2y + dx^2 + dy^2 = 0 \end{cases}$$

le quali equazioni sono identiche alle (3) sviluppate. Dalle ultime due di queste tre equazioni si possono ricavare le coordinate α e β del centro di curvatura, e si ha

$$(7) \qquad \alpha = x - dy\frac{dx^2+dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}, \quad \beta = y + dx\frac{dx^2+dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}$$

e sostituendo nella prima si ricava, dopo brevi calcoli

$$(8) \qquad R = \pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

ove il segno $\pm$ si prenderà in guisa che R risulti positivo. Del resto questa espressione di R si ottiene pure dalla (5), osservando che

$$gr\,\mathbf{u} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

e che il numero che misura l'area $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}$, tenendo conto del segno, vale appunto

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Esempio. — Applicheremo le formule precedenti all'ellisse data mediante le equazioni

$$x = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad y = b\cos t$$

ove a e b sono i semiassi dell'ellisse, e t l'angolo eccentrico. Si avrà

$$F(t) = (a\,\mathrm{sen}\,t - \alpha)^2 + (b\cos t - \beta)^2 - R^2.$$

Quindi, derivando due volte rispetto a t, si avranno le tre equazioni

$$(a\,\mathrm{sen}\,t - \alpha)^2 + (b\cos t - \beta)^2 = R^2$$
$$\alpha\,a\cos t - \beta\,b\,\mathrm{sen}\,t = (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}\,t\cos t$$
$$\alpha\,a\,\mathrm{sen}\,t + \beta\,b\cos t = (a^2 - b^2)\,(\mathrm{sen}^2 t - \cos^2 t);$$

dalle due ultime si possono ricavare le coordinate α e β del centro di curvatura

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}\,\mathrm{sen}^3 t, \quad \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\cos^3 t;$$

e dalla prima si ottiene

$$R = \frac{(a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Se fra le espressioni di α e β in funzione di t si elimina la vabile t, si avrà l'equazione dell'evoluta dell'ellisse. Quest'eliminazione si eseguisce ricavando dalla prima sen t, dalla seconda cos t, e sostituendo nella relazione $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Se invece di α e β, coordinate del centro di curvatura, si legge x ed y, l'equazione della evoluta diventa

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

7. Se l'equazione della curva, in coordinate cartesiane ortogonali, è della forma

$$y = f(x)$$

posto $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, le equazioni che determinano le coordinate α e β del centro di curvatura ed il raggio R sono

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$
$$x - \alpha + (y - \beta)\, y' = 0$$
$$1 + y'^2 + (y - \beta)\, y'' = 0$$

da cui si ricava

$$\alpha = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\pm y''}.$$

Esempio. — L'equazione d'una conica riferita ad un suo asse ed alla tangente nel vertice, è

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Derivando si ha

$$yy' = p + qx, \quad yy'' + y'^2 = q;$$

sostituendo nella seconda ad y' il valore dato dalla prima, si ha

dopo alcune riduzioni $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$; quindi il raggio di curvatura diventa

$$R = \frac{y^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Osservando che $y\sqrt{1+y'^2}$ vale la lunghezza della normale PN (pag. 72), si deduce

$$R = \frac{\overline{PN}^3}{p^2}$$

ossia nelle coniche il raggio di curvatura è proporzionale al cubo della normale.

8. Se la curva è data in coordinate polari mediante un'equazione della forma $r = f(\alpha)$, detto **a** un segmento eguale all'unità di misura ed avente la direzione del raggio vettore OP, si ha (pag. 80)

$$OP \equiv r\mathbf{a}, \quad \mathbf{u} \equiv r'\mathbf{a} + r\mathbf{a}', \quad \mathbf{v} \equiv r''\mathbf{a} + 2r'\mathbf{a}' + r\mathbf{a}''$$

ove, com'è noto, **a'** è un segmento uguale in lunghezza ad **a**, e che fa con questo un angolo retto; $\mathbf{a}'' \equiv -\mathbf{a}$. Quindi si deduce

$$gr\,\mathbf{u} = \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad \mathbf{u}.\mathbf{v} = (r^2 + 2r'^2 - rr'')\,\mathbf{a}.\mathbf{a}'$$

e poichè $gr\,\mathbf{a}.\mathbf{a}' = 1$, sarà $gr\,\mathbf{u}.\mathbf{v} = \pm(r^2 + 2r'^2 - rr'')$. Sostituendo quindi nell'espressione del raggio di curvatura, si ottiene

$$R = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

il segno essendo preso in guisa che R risulti positivo.

Si consideri, come esempio, la spirale logaritmica di equazione $r = e^{a\alpha}$. Si avrà $r' = a e^{a\alpha}$, $r'' = a^2 e^{a\alpha}$; sostituendo si ricava

$$R = r\sqrt{1+a^2}.$$

D'altra parte la lunghezza N della normale polare, che in generale vale $\sqrt{r^2 + r'^2}$, nel nostro caso diventa $N = r\sqrt{1+a^2}$; quindi $R = N$, ossia, nella spirale logaritmica, il raggio di curvatura è eguale alla lunghezza della normale polare. Il centro di curvatura sarà perciò l'estremità della sottonormale polare.

9. Sono collegati colla curvatura d'una curva piana alcuni limiti che ora determineremo.

1° Siano P e P′ due punti d'una curva, e sia M la proiezione di P′ sulla tangente alla curva in P. Si descriva il cerchio tangente alla curva in P e passante per P′. Detto Q il secondo punto d'intersezione di MP′ con esso, sarà

$$MP^2 = MP' \times MQ, \quad \text{ossia} \quad \frac{MP^2}{MP'} = MQ.$$

Si faccia ora tendere P′ verso P. Il cerchio ha per limite il cerchio osculatore alla curva in P; il segmento MQ ha per limite il diametro 2R di questo cerchio; quindi si ricava

$$\lim \frac{\overline{PM}^2}{MP'} = 2R.$$

2° L'espressione del raggio di curvatura si può pure ottenere in quest'altro modo. Dati alla variabile t i valori t_1 t_2 t_3, siano P_1 P_2 P_3 le posizioni corrispondenti del punto variabile; dette a, b, c le lunghezze dei lati P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, e Δ l'area del triangolo $P_1P_2P_3$, il raggio R del cerchio passante pei tre punti P_1 P_2 P_3 è dato da

$$R = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Ora si ha (V. pag. 66)

$$\lim \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1} \equiv \lim \frac{P_1P_3}{t_3 - t_1} \equiv \lim \frac{P_2P_3}{t_3 - t_2} \equiv \mathbf{u};$$
$$\lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} \equiv \frac{1}{4}\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}.$$

Quindi dividendo il numeratore e il denominatore nella espressione di R per $(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)$, e badando a ciò che diventano queste equipollenze ove si consideri il valore assoluto di ambo i membri, si ritrova

$$\lim R = \frac{(gr\, \mathbf{u})^3}{gr(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})}.$$

3° Nel triangolo formato dai tre punti $P_1\,P_2\,P_3$ della curva si possono considerare il baricentro S, il centro C del cerchio circoscritto, il punto H d'incontro delle altezze, e il centro Γ del cerchio (dei nove punti) passante pei punti medii dei lati del triangolo. È noto che questi punti stanno su d'una retta, e si ha in valor assoluto ed in segno

$$SH = -2SC, \quad S\Gamma = -\frac{1}{2}\, SC.$$

Facciansi tendere $P_1\,P_2\,P_3$ verso uno stesso punto P. Il baricentro S avrà per limite P; il punto C avrà per limite il centro C del cerchio osculatore; quindi, detti ancora H e Γ i limiti di H e Γ, si avrà

$$PH = -2PC, \quad P\Gamma = -\frac{1}{2}\, PC.$$

Detti $P_1\,P_2\,P_3$ gli angoli dello stesso triangolo, si ha in valor assoluto

$$\frac{\operatorname{sen} P_1}{P_2P_3} = \frac{\operatorname{sen} P_2}{P_3P_1} = \frac{\operatorname{sen} P_3}{P_1P_2} = \frac{1}{2R}.$$

Passando al limite si deduce che i seni degli angoli del triangolo hanno tutti per limite zero; e siccome la somma di questi angoli

vale π, due angoli del triangolo avranno per limite zero, ed il terzo avrà per limite π.

Detti $r\ r'\ r''\ r'''$ i raggi dei cerchi inscritto ed exinscritti nel triangolo, si ha

$$r = 4\mathrm{R}\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{P}_1\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{P}_2\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{P}_3;$$

$$r' = 4\mathrm{R}\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{P}_1\ \cos\frac{1}{2}\mathrm{P}_2\ \cos\frac{1}{2}\mathrm{P}_3, \quad \text{ecc.};$$

Al limite il raggio del cerchio inscritto e due dei raggi dei cerchi exinscritti hanno per limite zero, mentre uno di questi ha per limite il quadruplo del raggio di curvatura.

10. Se d'un arco di curva piana AB si sa che in ogni suo punto il raggio di curvatura R soddisfa alle condizioni

$$\mathrm{R}_1 < \mathrm{R} < \mathrm{R}_2$$

allora, data una delle tre quantità: la lunghezza s dell'arco di curva, la lunghezza c della sua corda, e l'area u limitata fra l'arco e la corda, si possono determinare dei limiti che comprendano le altre due.

Supporremo, per semplicità, l'arco AB convesso, cioè tale che ogni retta l'incontri al più in due punti; e che esso sia tutto interno al cerchio di diametro AB. Si immagini un punto P che percorra l'arco AB, ed il cerchio passante pei tre punti A, B, P, il cui raggio r varierà con P. In virtù delle ipotesi fatte, il segmento limitato dall'arco circolare APB e dalla sua corda AB è sempre compreso nel semicerchio di diametro AB; e l'area di questo segmento e la lunghezza dell'arco circolare APB sono tanto più grandi quanto più piccolo è il raggio r del cerchio, e viceversa. Variando P su AB, il raggio r assumerà il suo minimo valore r_1 per una posizione P_1 di P, e assumerà il suo massimo valore r_2 per una posizione P_2 di P.

Allora il segmento limitato dell'arco di cerchio $\mathrm{AP_1B}$ e dalla sua corda, il quale è il massimo fra tutti i segmenti APB, conterrà nel suo interno l'arco curvilineo dato. Quindi la lunghezza s dell'arco

dato è minore della lunghezza s_1 dell'arco circolare AP_1B, perchè archi contermini, convessi dalla stessa parte, l'uno avviluppato e l'altro avviluppante:

$$s < s_1.$$

Inoltre l'area u compresa fra l'arco dato e la sua corda è minore del segmento u_1 limitato dall'arco di cerchio AP_1B e dalla sua corda:

$$u < u_1.$$

Ma l'arco dato AP_1B e l'arco circolare AP_1B sono tangenti in P_1, e il primo è interno al secondo; quindi il raggio di curvatura della curva data in P_1 è minore del raggio r_1 del cerchio; e siccome R_1 è minore del raggio di curvatura in P_1, si deduce $r_1 > R_1$. Ora l'arco s_1 del cerchio AP_1B è minore dell'arco di cerchio passante per gli stessi punti e descritto con raggio minore R_1:

$$s_1 < 2R_1 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1};$$

e l'area u_1 del segmento di raggio r_1 è minore dell'area del segmento di raggio R_1

$$u_1 < R_1^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1} - \frac{c}{2}\sqrt{R_1^2 - \frac{c^2}{4}};$$

quindi si conchiude

$$s < 2R_1 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1}, \quad u < R_1^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1} - \frac{c}{2}\sqrt{R_1^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

In modo analogo, considerando il cerchio AP_2B, si deduce

$$s > 2R_2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_2}, \quad u > R_2^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_2} - \frac{c}{2}\sqrt{R_2^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Se il raggio di curvatura nei varii punti di AB assume tutti i va-

lori compresi fra R_1 e R_2, allora esisterà un valore R di questo raggio per cui si avrà

$$s = 2R \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R}$$

che si può scrivere

$$c = 2R \operatorname{sen} \frac{s}{2R};$$

ed esisterà un altro valore di R per cui si avrà

$$u = R^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R} - \frac{c}{2}\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Sviluppando in serie le funzioni che compaiono nel secondo membro si ha

$$s = c + \frac{c^3}{24R^2} + \frac{3c^5}{64R^4} + \ldots.$$

$$c = s - \frac{s^3}{24R^2} + \frac{s^5}{1920R^4} + \ldots.$$

$$u = \frac{c^3}{12R} + \frac{c^5}{160R^3} + \ldots.$$

§ 2. Curve a doppia curvatura.

11. Nello spazio un cerchio è determinato conoscendone il piano, il centro e il raggio. Diremo che un cerchio variabile ha per limite un cerchio fisso se il piano, il centro e il raggio del primo hanno rispettivamente per limiti il piano, il centro e il raggio del secondo.

Dicesi *cerchio osculatore* ad una curva (gobba) in un suo punto P il limite del cerchio passante per tre punti della curva i quali tendano al punto P.

Se la posizione del punto P che descrive la curva è funzione della variabile numerica t avente per derivate prima e seconda i segmenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ funzioni continue di t, che pel valore considerato non

sono nulle nè coincidono, allora il centro del cerchio osculatore giace nel piano osculatore, sulla normale principale alla curva, da quella parte verso cui è rivolta la derivata seconda, e il raggio del cerchio osculatore è terza proporzionale dopo la derivata prima e la componente normale della derivata seconda.

Infatti, dati a t tre valori $t_1\, t_2\, t_3$, siano $P_1\, P_2\, P_3$ le posizioni corrispondenti del punto P; si immagini il cerchio passante per questi tre punti; il suo piano sarà il piano $P_1P_2P_3$; siano C ed R il centro ed il raggio. Si consideri la funzione $F(t) = \overline{CP}^2 - R^2$, ove si suppone che P sia un punto della curva. Sarà $F(t_1) = 0$, $F(t_2) = 0$, $F(t_3) = 0$. Quindi $\frac{1}{2} F'(t) = CP \times \mathbf{u}$ si annulla per due valori di t medii fra i precedenti, ossia C giace in due piani normali all'arco considerato di curva. Inoltre $\frac{1}{2} F''(t) = CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2$ si annulla per un valore di t. Si passi al limite; il piano del cerchio ha per limite il piano osculatore alla curva in P. Quindi il punto C che giace nel piano $P_1P_2P_3$ e soddisfa alle equazioni $F'(t) = 0$ e $F''(t) = 0$ per valori di t medii fra i considerati, avrà per limite un punto, che diremo ancora C, il quale giace nel piano osculatore e che soddisfa pel valore considerato di t, alle condizioni $F'(t) = 0$ e $F''(t) = 0$, vale a dire

$$PC \times \mathbf{u} = 0, \quad PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2.$$

La prima di queste equazioni dice che C giace nel piano normale alla curva; e siccome esso si trova nel piano osculatore, si conchiude che esso sta sulla normale principale alla curva. La seconda equazione dice che l'angolo di PC con $\mathbf{v}$ è acuto (poichè $PC \times \mathbf{v}$ è positivo), e che il prodotto della lunghezza di PC per la proiezione di $\mathbf{v}$ su esso vale il quadrato della derivata prima.

12. La costruzione del cerchio osculatore ad una curva qualunque, ove si conoscano le derivate prima e seconda del punto che la descrive è identica a quella per le curve piane.

La condizione affinchè il centro C giaccia nel piano osculatore si può mettere sotto la forma.

$$PC.\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0 \qquad (1)$$

unendo a questa le due precedentemente trovate

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{PC} \times \mathbf{u} = 0$$

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{PC} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2$$

si hanno tre equazioni da cui risulta determinato il punto C.

Se si riferiscono tutti i punti ad assi cartesiani ortogonali, dette $\alpha\,\beta\,\gamma$ le coordinate del punto C, le equazioni precedenti diventano

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\alpha - x)dx + (\beta - y)dy + (\gamma - z)\,dz = 0$$

$$(\alpha - x)d^2x + (\beta - y)d^2y + (\gamma - z)d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

da cui si possono ricavare le coordinate $\alpha\,\beta\,\gamma$ del centro del cerchio osculatore, e quindi il suo raggio R. Del resto il raggio del cerchio osculatore si può mettere sotto la forma

$$\mathrm{R} = \frac{(gr\;\mathbf{u})^2}{gr\;\mathbf{v}_n} = \frac{(gr\;\mathbf{u})^3}{gr(\mathbf{u}\,.\mathbf{v})}.$$

Ora, indicando con accenti le derivate di x, y, z, si ha

$$gr\,\mathbf{u} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{j}\,.\,\mathbf{k} & \mathbf{k}\,.\,\mathbf{i} & \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

quindi

$$gr(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2},$$

e

$$\mathrm{R} = \frac{(x'^2 + y'^2 + 2'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}.$$

13. I piani normali alla curva in due suoi punti P_1 e P_2 si incontrano secondo una retta; al limite di questa retta, ove i punti P_1 e P_2 tendano ad una stessa posizione P, si dà il nome di *asse del piano osculatore.* Sia M un punto qualunque dell'intersezione dei piani normali in P_1 e P_2; posto $f(t) = MP \times \mathbf{u}$, ove P è un punto della curva, e $\mathbf{u}$ la sua derivata, sarà $f(t_1) = 0$ e $f(t_2) = 0$; quindi $f'(t) = MP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2$ si annullerà per un valore di t medio fra i precedenti. Passando al limite, la retta in questione, pei cui punti si annullavano $f(t)$ e $f'(t)$, per valori convenienti di t, avrà per limite la retta luogo dei punti M che soddisfano pel valore considerato di t alle equazioni $f(t) = 0$ e $f'(t) = 0$, ossia

$$PM \times \mathbf{u} = 0 \quad PM \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2.$$

La prima è l'equazione del piano normale alla curva; la seconda quella d'un piano normale al segmento $\mathbf{v}$, e quindi normale al piano osculatore; onde la retta loro intersezione è normale al piano osculatore; inoltre quelle equazioni sono soddisfatte dal centro dol cerhio osculatore; quindi si conchiude che l'asse del piano osculatore è la normale a questo piano nel centro del cerchio osculatore.

14. Intenderemo per limite d'una sfera variabile una sfera fissa il cui centro ed il cui raggio siano i limiti del centro e del raggio della sfera variabile.

Dicesi *sfera osculatrice* ad una curva in un suo punto P il limite della sfera passante per quattro punti della curva, i quali tendano a P.

La posizione del punto P, che descrive la curva, sia funzione della variabile numerica t, avente le successive derivate $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Dati a t quattro valori $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$, siano $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ le posizioni corrispondenti del punto; siano ancora C il centro ed r il raggio della sfera passante per essi. Pongasi $F(t) = \overline{CP}^2 - r^2$, ove P è il punto che descrive la curva. Poichè i punti $P_1 ... P_4$ stanno sulla sfera, sarà

$$F(t_1) = 0, \quad F(t_2) = 0, \quad F(t_3) = 0, \quad F(t_4) = 0$$

e così si hanno quattro equazioni che determinano la sfera. Derivando $F(t)$ si ricava

$$\frac{1}{2} F'(t) = CP \times \mathbf{u}, \quad \frac{1}{2} F''(t) = CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2,$$

$$\frac{1}{2} F'''(t) = CP \times \mathbf{w} + 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Ora, poichè $F(t)$ si annulla per quattro valori di t, si deduce che $F'(t)$ si annullerà per tre, $F''(t)$ per due, e $F'''(t)$ per un valore di t compreso fra i valori considerati. Passando al limite, tutti questi valori di t tendono a quello corrispondente al punto P; e i limiti del centro C e del raggio r, che indicheremo ancora con C ed r soddisferanno alle equazioni

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0, \quad F'''(t) = 0$$

ossia

$$\overline{CP}^2 = r^2, \quad PC \times \mathbf{u} = 0, \quad PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2, \quad PC \times \mathbf{w} = 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

le quali determinano appunto il centro ed il raggio della sfera osculatrice.

Le due equazioni $PC \times \mathbf{u} = 0$ e $PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2$ dicono che il centro della sfera osculatrice giace sull'asse del piano osculatore; quindi si scorge che la sfera osculatrice taglia il piano osculatore secondo il cerchio osculatore.

Le equazioni precedenti si possono trasformare in equazioni fra le coordinate dei punti P e C, e così si possono ricavare le espressioni delle coordinate del centro e del raggio della sfera osculatrice; ma arriveremo più tardi allo stesso risultato per altra via.

Si osservi ancora che il centro della sfera osculatrice si può considerare come il punto d'incontro di tre piani normali alla curva in tre punti che tendano a P. Invero, se C è il punto d'incontro di questi piani, conservando le notazioni precedenti, la funzione $\frac{1}{2} F'(t) = CP \times \mathbf{u}$ sarà nulla per tre valori di t; quindi si annulle-

ranno pure, per valori intermedii di t, $F''(t)$ e $F'''(t)$. Al limite, il punto d'incontro dei tre piani tenderà verso un punto C per cui saranno $F'(t) = 0$, $F''(t) = 0$, $F'''(t) = 0$, il quale punto è il centro della sfera osculatrice.

15. Per le curve non piane si hanno a considerare la *curvatura*, che dipende dalle successive deviazioni della tangente, e la *torsione*, o *seconda curvatura*, che dipende dalle successive deviazioni del piano osculatore.

Sia AB un arco di curva qualunque. Si immagini un punto P che lo percorre da A in B. Da un punto fisso O si conduca un segmento $O\pi$, avente la direzione della tangente alla curva in P, ed eguale all'unità di misura. Variando P da A in B, il punto π descriverà una curva sferica $\alpha\beta$, la cui lunghezza chiamasi *curvatura assoluta* dell'arco AB.

Prendansi sull'arco AB alcuni punti successivi P_0, P_1, P_2,... P_n dei quali il primo coincida con A e l'ultimo con B; siano t_0, t_1,... t_n le tangenti alla curva in questi punti, e π_0, π_1,... π_n i punti corrispondenti della curva sferica. La curvatura di AB è la lunghezza dell'arco di curva sferica π_0, π_1..., π_n; questo alla sua volta è il limite superiore della somma degli archi di cerchio massimo $\pi_0\pi_1$, $\pi_1\,\pi_2$,... $\pi_{n-1}\,\pi_n$ che uniscono a due a due i punti della curva. Ora gli archi $\pi_0\pi_1$, $\pi_1\pi_2$,... misurano gli angoli al centro $\pi_0 O \pi_1$, $\pi_1\, O \pi_2$,... i quali sono eguali agli angoli $t_0 t_1$, $t_1 t_2$,... formati dalle tangenti nei successivi punti della curva. Quindi la curvatura dell'arco AB è il limite superiore della somma degli angoli $t_0 t_1$, $t_1 t_2$,... $t_{n-1}\, t_n$ formati dalle successive tangenti all'arco, ove variino in tutti i modi possibili il numero delle tangenti e i loro punti di contatto.

È facile riconoscere che la definizione ora data di curvatura di una curva qualunque coincide con quella precedentemente data, ove la curva sia piana.

La curvatura assoluta d'un arco è una grandezza coesistente coll'arco. Il rapporto $\frac{\sigma}{s}$ fra la curvatura assoluta σ dell'areo alla sua lunghezza s dicesi *curvatura media* dell'arco. Il limite della curvatura

media d'un arco di curva, ove gli estremi tendono ad uno stesso punto P, dicesi *curvatura della curva nel punto* P; la indicheremo, secondo il solito, con $\frac{d\sigma}{ds}$. Al reciproco della curvatura d'una curva in un suo punto si dà il nome di *raggio di curvatura* della curva in quel punto. Indicandolo con R, si avrà $\frac{1}{R}=\frac{d\sigma}{ds}$.

16. Si immagini ora in ogni punto P dell'arco curvilineo AB il piano osculatore, e la sua normale, cioè la binormale alla curva. Si conduca dal punto fisso O un segmento $O\mu$ parallelo alla binormale ed eguale all'unità di misura. Variando P da A in B, il punto μ descriverà una curva sferica, la cui lunghezza τ dicesi *torsione assoluta* dell'arco AB.

Si scorge dalla definizione che la torsione d'un arco di curva piana è nulla; e che essa si può considerare come il limite superiore della somma degli angoli diedri formati dai piani osculatori in successivi punti dell'arco.

La torsione d'un arco è funzione distributiva dell'arco. Al rapporto $\frac{\tau}{s}$ della torsione assoluta d'un arco alla sua lunghezza si dà il nome di *torsione media* dell'arco. Il limite $\frac{d\tau}{ds}$ della torsione media d'un arco di curva, ove i suoi estremi tendono ad uno stesso punto P, si chiama *torsione della curva nel punto* P. Facendo $\frac{1}{T}=\frac{d\tau}{ds}$, a T si dà il nome di *raggio di torsione*.

17. Il punto P, che descrive la curva, abbia le successive derivate $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$,... Pongasi

$$u = gr\,\mathbf{u}, \quad \omega = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}), \quad \Delta = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}).$$

Se x, y, z sono le coordinate cartesiane ortogonali del punto P,

detti **i**, **j**, **k** i segmenti di riferimento, e indicando con accenti le derivate di x, y, z, si ha

$$\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k};\ \mathbf{u} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k};\ \mathbf{v} \equiv x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k};$$
$$\mathbf{w} \equiv x'''\mathbf{i} + y'''\mathbf{j} + z'''\mathbf{k};\ldots$$

$$u = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$
$$\omega = \sqrt{(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2};$$

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Siano **a**, **b**, **c** tre segmenti eguali all'unità di misura, dei quali il primo abbia la direzione della tangente, il secondo quella della normale principale, e il terzo quella della binormale alla curva. Questi segmenti soddisferanno alle equazioni:

(1) $\mathbf{a}^2 = 1,\quad \mathbf{b}^2 = 1,\quad \mathbf{c}^2 = 1,\quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0,\quad \mathbf{a} \times \mathbf{c} = 0,\quad \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$

delle quali le tre prime dicono che essi sono eguali all'unità di misura, e le altre tre che essi sono a due a due ortogonali. Inoltre sono soddisfatte le condizioni

(2) $\mathbf{c} \times \mathbf{u} = 0,\quad \mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0,\quad \mathbf{b} \times \mathbf{u} = 0$

che legano questi segmenti colla curva. Le equazioni precedenti definiscono completamente la grandezza e la direzione dei tre segmenti, ma ne lasciano ancora indeterminato il verso. Supporremo perciò che **a**, il quale ha la direzione di **u**, ne abbia pure il verso; che l'area **a**.**b**, la quale giace nel piano osculatore, abbia lo stesso senso dell'area **u**.**v**; e che il volume **a**.**b**.**c** abbia lo stesso senso del volume **u**.**v**.**w**.

Fatte queste convenzioni si avrà

(3) $\mathbf{u} \equiv u\mathbf{a},\quad \mathbf{u}.\mathbf{v} \equiv \omega\mathbf{a}.\mathbf{b},\quad \mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w} \equiv \Delta\,\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}.$

I segmenti $O\pi$ e $O\mu$, di cui si è parlato nei numeri precedenti, sono equipollenti ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$. Quindi, detti s, σ, τ gli archi della curva data e delle curve descritte dai punti π e μ, e detti ancora R e T i raggi di curvatura e di torsione, si avrà

$$(4) \qquad \frac{ds}{dt} = u, \quad \frac{d\sigma}{dt} = gr\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right), \quad \frac{d\tau}{dt} = gr\left(\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right);$$
$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}.$$

Si differenzino le equazioni $\mathbf{c}^2 = 1$, $\mathbf{c} \times \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0$; si avrà

$$\mathbf{c} \times d\mathbf{c} = 0, \qquad \mathbf{c} \times \mathbf{v}\,dt + \mathbf{u} \times d\mathbf{c} = 0, \qquad \mathbf{c} \times \mathbf{w}\,dt + \mathbf{v} \times d\mathbf{c} = 0.$$

La prima di queste equazioni dice che il segmento $d\mathbf{c}$ è normale al segmento $\mathbf{c}$; la seconda, poichè $\mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0$, si riduce a $\mathbf{u} \times d\mathbf{c} = 0$, e dice che $d\mathbf{c}$ è normale ad $\mathbf{u}$, e quindi ad $\mathbf{a}$; perciò il segmento $d\mathbf{c}$ che è normale ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{c}$, avrà la direzione di $\mathbf{b}$. D'altra parte, dalle formule (4) si ha $gr\,d\mathbf{c} = d\tau = \frac{ds}{\mathrm{T}}$; quindi si deduce

$$d\mathbf{c} = \pm \mathbf{b} \frac{ds}{\mathrm{T}}$$

ove si prenderà il segno + o il —, secondochè $d\mathbf{c}$ ha lo stesso senso, o il senso opposto di $\mathbf{b}$. Sostituendo questo valore di $d\mathbf{c}$ nella terza equazione, si ha $\mathbf{c} \times \mathbf{w}\,dt \pm \mathbf{v} \times \mathbf{b} \frac{ds}{\mathrm{T}} = 0$. Di qui si ricava

$$\mathrm{T} = \mp \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{b}\,ds}{\mathbf{w} \times \mathbf{c}\,dt};$$

questa espressione di t si può mettere sotto altra forma, introducendo u, ω, Δ. Si ha che $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = gr(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{v})$, $\mathbf{w} \times \mathbf{c} = gr(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}\,.\,\mathbf{w})$; $\frac{ds}{dt} = u$; quindi

$$\mathrm{T} = \mp \frac{gr(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{v})\,u}{gr(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}\,.\,\mathbf{w})} = \mp \frac{gr(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v})^2}{gr(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}\,.\,\mathbf{w})} = \mp \frac{\omega^2}{\Delta}.$$

E siccome ω, Δ e T sono numeri positivi, si dovranno scegliere i segni inferiori, e si ha

$$[I] \qquad d\mathbf{c} \equiv -\mathbf{b}\frac{ds}{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{T} = \frac{\omega^2}{\Delta}.$$

Le formule $\mathbf{a}^2 = 1$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = 0$ differenziate, tenendo conto del valore ora ottenuto di $d\mathbf{c}$, dànno

$$\mathbf{a} \times d\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{c} \times d\mathbf{a} = 0$$

ossia il segmento $d\mathbf{a}$, che è normale ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{c}$, avrà la direzione di $\mathbf{b}$; e siccome $gr\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right) = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{\mathrm{R}dt}$, si deduce $d\mathbf{a} \equiv \pm \mathbf{b}\frac{ds}{\mathrm{R}}$.

L'equipollenza $\mathbf{u} \equiv u\mathbf{a}$, differenziata, dà $d\mathbf{u} \equiv \mathbf{a}du + ud\mathbf{a}$. Sostituendo a $d\mathbf{a}$ e du i loro valori, e moltiplicando per $\mathbf{b}$, si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b}dt = \pm u\frac{ds}{\mathrm{R}}$$

da cui si ricava $\mathrm{R} = \pm \frac{uds}{\mathbf{v} \times \mathbf{b}dt}$. Ma $\frac{ds}{dt} = u$, e

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = \frac{gr(\mathbf{u}.\mathbf{v})}{u} = \frac{\omega}{u};$$

onde sostituendo $\mathrm{R} = \pm \frac{u^3}{\omega}$. Siccome u, R ed ω sono quantità positive, si dovrà prendere il segno superiore, e si ha

$$[II] \qquad d\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}\frac{ds}{\mathrm{R}}, \qquad \mathrm{R} = \frac{u^3}{\omega}.$$

La seconda di queste formule dice appunto che il raggio di curvatura d'una curva qualunque è eguale al raggio del cerchio osculatore alla medesima.

Si differenzino infine le formule $\mathbf{b}^2 = 1$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$,

che contengono b; tenendo conto dei valori precedentemente ottenuti per $d\mathbf{a}$ e $d\mathbf{c}$, si ottiene

$$\mathbf{b} \times d\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{a} \times d\mathbf{b} + \frac{ds}{R} = 0, \quad \mathbf{c} \times d\mathbf{b} - \frac{ds}{T} = 0$$

le quali dicono che le proiezioni di $d\mathbf{b}$ sui segmenti a, b, c valgono rispettivamente $-\frac{ds}{R}$, 0 $\frac{ds}{T}$; quindi

$$\text{[III]} \qquad d\mathbf{b} \equiv -\mathbf{a}\frac{ds}{R} + \mathbf{c}\frac{ds}{T}.$$

L'equazione del piaho normale della curva in P è $PM \times \mathbf{a} = 0$. Differenziandola, considerando il punto M come fisso, e sostituendo a $d\mathbf{a}$ il suo valore, si ha dopo alcune riduzioni $PM \times \mathbf{b} = R$. L'insieme di queste due equazioni determina, com'è noto, l'asse del piano osculatore. Si differenzi una seconda volta; si avrà

$$PM \times \left(-\mathbf{a}\frac{ds}{R} + \mathbf{c}\frac{ds}{T}\right) = dR.$$

L'insieme delle tre equazioni precedenti determina il centro della sfera osculatrice. Sia C il centro del cerchio osculatore; esso soddisferà alle prime due equazioni $PC \times \mathbf{a} = 0$, $PC \times \mathbf{b} = R$, ed all'equazione del piano osculatore $PC \times \mathbf{c} = 0$. Quindi

$$\text{[IV]} \qquad PC \equiv R\mathbf{b}$$

e si riconosce di nuovo che il raggio del cerchio osculatore vale il raggio di curvatura R.

Sia S il centro della sfera osculatrice; esso dovrà soddisfare alle tre equazioni precedenti

$$PS \times \mathbf{a} = 0, \quad PS \times \mathbf{b} = R, \quad PS \times \left(-\mathbf{a}\frac{ds}{R} + \mathbf{c}\frac{ds}{T}\right) = dR;$$

e sostituendo a $PS \equiv PC + CS \equiv Rb + CS$ il suo valore, si ricava

$$\text{[V]} \qquad CS \equiv cT \frac{dR}{ds}.$$

Detto r il raggio della sfera osculatrice, sarà

$$r^2 = \overline{PS}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CS}^2;$$

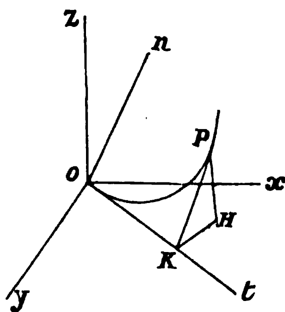
e sostituendo a PC e CS i loro valori

$$\text{[VI]} \qquad r^2 = R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Dalle due ultime formule si deduce che se R ha un valore costante, e quindi $\frac{dR}{ds} = 0$, sarà $CS \equiv 0$, ossia il centro della sfera osculatrice coincide col centro del cerchio osculatore, e i raggi di quella sfera e di questo cerchio sono eguali.

§ 3. Superficie.

18. I raggi di curvatura di tutte le curve giacenti su d'una superficie e passanti per uno stesso punto sono legati da notevoli relazioni che ora studieremo.



Si riferisca perciò la superficie ad assi cartesiani ortogonali; prendasi per origine O il punto considerato della superficie, e per piano xy il piano tangente alla superficie in quel punto. Allora, se $z = f(x,y)$ è l'equazione della superficie, in virtù delle ipotesi fatte, z, $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ saranno nulle per $x = 0$ ed $y = 0$. Quindi, sviluppando colla formula di Maclaurin, l'equazione della superficie diventa

$$z = \frac{1}{2}\left[(a + \alpha)x^2 + 2(b + \beta)\,xy + (c + \gamma)\,y^2\right],$$

ove a, b, c sono i valori di $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ per $x=0$ ed $y=0$, e α, β, γ sono infinitesimi con x e y.

Si immagini tracciata sulla superficie una linea qualunque passante per O; sia Ot la tangente ad essa in O, On la normale principale, quindi nOt il piano osculatore a questa linea. Dicasi φ l'angolo xOt, e θ l'angolo nOz.

Si prenda su questa curva un punto qualunque P; siano x, y, z le sue coordinate, ρ la sua distanza dall'origine, λ, μ, ν gli angoli che la retta OP fa cogli assi. Dal punto P si abbassi la perpendicolare PH sul piano xOy, e la PK sulla tangente Ot. Dal triangolo rettangolo PHK si ricava $\mathrm{PK} = \frac{z}{\cos \mathrm{HPK}}$; sostituendo nello sviluppo di z ad x ed y i loro valori $\rho \cos \lambda$ e $\rho \cos \mu$, si avrà

$$\mathrm{PK} = \rho^2 \frac{(a+\alpha)\cos^2\lambda + 2(b+\beta)\cos\lambda\cos\mu + (c+\gamma)\cos^2\mu}{2\cos \mathrm{HPK}}$$

dividasi per $\rho^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2$; si ottiene

$$\frac{\mathrm{PK}}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = \frac{(a+\alpha)\cos^2\lambda + 2(b+\beta)\cos\lambda\cos\mu + (c+\gamma)\cos^2\mu}{2\cos \mathrm{HPK}}.$$

Facciasi ora tendere P verso il punto fisso O. Si ha che

$$\lim \frac{\mathrm{PK}}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = \frac{1}{2\mathrm{R}}$$

indicando con R il raggio di curvatura della curva data in O; $\lim \alpha = \lim \beta = \lim \gamma = 0$; la retta OP ha per limite la tangente Ot, e gli angoli λ, μ, ν che essa fa cogli assi hanno per limiti

$$\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{\pi}{2}$$

che Ot fa cogli assi; la retta indefinita PH ha per limite Oz; il piano OKP tende al piano osculatore della curva in O; quindi la retta

indefinita PK ha per limite On; l'angolo HPK ha per limite $zOn = \theta$; perciò passando ai limiti, e moltiplicando per 2 si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi + c\,\mathrm{sen}^2\varphi}{\cos\theta}.$$

19. Dalla formula precedente si possono dedurre alcune conseguenze.

Anzitutto, il raggio di curvatura della curva in O non dipende che dagli angoli φ e θ; quindi esso è eguale al raggio di curvatura della sezione piana fatta nella superficie col piano osculatore alla curva data. In tal modo lo studio della curvatura delle infinite curve tracciate sulla superficie resta ridotto a quello delle sezioni piane di essa.

Si sechi la superficie col piano zOt (per cui $\theta = 0$). Detto R_0 il raggio di curvatura corrispondente, si avrà

$$\frac{1}{R_0} = a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi + c\,\mathrm{sen}^2\varphi\,;$$

quindi, sostituendo nella formula precedente, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0\cos\theta}$, ossia

$$R = R_0 \cos\theta.$$

Questa formula dice che il raggio di curvatura R d'una curva qualunque segnata sulla superficie è eguale a quello della sezione fatta con un piano normale alla superficie e passante per la tangente alla curva, proiettato sul piano osculatore della curva (teorema di Meunier).

In altre parole, se si immagina la sfera tangente alla superficie in O e di raggio R_0, poi si seca la superficie data e la sfera con un piano qualunque passante per Ot, l'intersezione del piano colla sfera è il cerchio osculatore dell'intersezione del piano colla superficie data. Questa proposizione riduce l'esame delle sezioni oblique a quello delle sezioni normali, alle quali ora ci potremo limitare.

20. Pertanto, indicando ora con R il raggio di curvatura della sezione fatta nella superficie col piano normale zOt si avrà

$$\frac{1}{R} = a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi + c\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

sia in valor assoluto che in segno. Variando φ, e quindi questo piano normale, varierà la curvatura $\frac{1}{R}$; ci proponiamo di trovarne i massimi e minimi valori. Perciò si faccia la derivata di $\frac{1}{R}$ rispetto a φ, e la si eguagli a zero; si avrà l'equazione

$$2(c-a)\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + 2b(\cos^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi) = 0$$

ovvero

$$(c-a)\mathrm{sen}\,2\varphi + 2b\cos 2\varphi = 0$$

ossia

$$\mathrm{tang}\,2\varphi = \frac{2b}{a-c},$$

cui debbono soddisfare i valori di φ che rendono massima o minima $\frac{1}{R}$. Ora, escluso il caso in cui $b=0$, e $a-c=0$, questa equazione fornisce per $\mathrm{tang}\,2\varphi$ un valore unico e determinato, quindi per 2φ infiniti angoli; ed indicando con $2\varphi_0$ uno qualunque di quelli che hanno per tangente $\frac{2b}{a-c}$, ogni angolo 2φ sarà della forma $2\varphi_0 + k\pi$, e quindi

$$\varphi = \varphi_0 + k\frac{\pi}{2},$$

ove k è un numero intero. Fatto $k=0$ si ha una prima soluzione $\varphi = \varphi_0$, cui corrisponde un certo piano. Fatto $k=1$ si ha

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$$

cui corrisponde un piano normale al precedente; attribuendo a k altri valori, si ritrovano gli stessi piani. Quindi esistono due e due soli piani corrispondentemente ai quali la derivata di $\frac{1}{R}$ è nulla; essi sono ortogonali fra loro, e, come vedremo quanto prima, per uno di essi la curvatura è massima e per l'altro è minima. Le sezioni fatte nella superficie con questi due piani diconsi *sezioni principali;* le tangenti a queste sezioni principali diconsi *tangenti principali.*

Finora nel sistema di assi cartesiani a cui si è riferita la figura, si è fissata la posizione dell'origine e del piano xOy; rimaneva ancora arbitraria la posizione dei piani xOz e yOz. Potremo supporre che essi coincidano coi piani delle sezioni principali; allora l'equazione $\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2b}{a-c}$ dovrà essere soddisfatta da $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$; quindi si annulla b, e l'equazione che dà la curvatura di una sezione normale qualunque, diventa

$$\frac{1}{R} = a\cos^2\varphi + c\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Fatto $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ il piano segante viene a coincidere successivamente coi due piani principali xOz e yOz; quindi detti R_1 e R_2 i raggi di curvatura di queste sezioni principali, si avrà

$$\frac{1}{R_1} = a, \quad \frac{1}{R_2} = c.$$

Sostituendo questi valori nella formula precedente si ottiene

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R_2},$$

la quale formula, dovuta ad EULERO, determina la curvatura d'una sezione normale qualunque nella superficie mediante le curvature

principali $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$, e l'angolo φ che il piano di quella sezione fa con uno dei piani principali.

21. Per studiare il modo di variare di R col variare di φ, suppongasi dapprima che i due raggi di curvatura principali abbiano lo stesso segno; allora è facile il riconoscere dalla formula precedente che R avrà sempre lo stesso segno, vale a dire che tutte le sezioni normali rivolgono la concavità nello stesso senso; inoltre R risulta sempre compreso fra R_1 e R_2. Un punto siffatto è un *punto ellittico*.

Suppongasi invece che R_1 e R_2 abbiano segno opposto, p. e. $R_1 > 0$ $R_2 < 0$. Scambiando R_2 in $-R_2$ si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} - \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2}.$$

Per $\varphi = 0$, R vale R_1; facendo crescere φ, si vede che $\frac{1}{R}$ diminuisce perchè diminuisce il minuendo ed aumenta il sottraendo; $\frac{1}{R}$ si annulla ove si prenda per φ un valore tale che

$$\frac{\cos^2 \varphi}{R_1} = \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2},$$

ossia

$$\operatorname{tang} \varphi = \pm \sqrt{\frac{R_1}{R_2}},$$

che ci fornisce per φ due valori eguali e di segno contrario. Facendo ancora crescere φ, la curvatura diventa negativa, e va crescendo in valor assoluto fino ad assumere il valore $-\frac{1}{R_2}$ per $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Variando φ da $\frac{\pi}{2}$ a π, la curvatura riprende gli stessi valori in ordine inverso. Il raggio di curvatura invece parte dal valore R_1, va crescendo fino a diventare infinito, poi assume valori negativi e va decrescendo in valor assoluto fino ad assumere il valore $-R_2$. In questo caso il punto è *iperbolico*.

Potrebbe anche avvenire che una delle curvature sia nulla; se p. e. $\frac{1}{R_2}=0$, sarà $\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}$, e variando φ da 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{R}$ varia da $\frac{1}{R_1}$ a zero, e R da R_1 ad ∞. In questo caso il punto è *parabolico*.

Nella discussione precedente si è supposto che nell'equazione $\operatorname{tang} 2\varphi=\frac{2b}{a-c}$ il numeratore e il denominatore non si annullassero contemporaneamente. Se invece $b=0$ ed $a=c$, l'equazione in R dà semplicemente $R=\frac{1}{a}$, vale a dire in questo caso il raggio di curvatura è costante per tutte le sezioni normali. Un punto siffatto dicesi *umbilico*.

22. Le questioni riferentisi alla curvatura delle superficie si possono trattare indipendentemente dalla scelta particolare di assi prima fatta; in tal modo troveremo alcune formule generali che saranno utili nelle discussioni di questo genere.

La posizione del punto P sulla superficie sia funzione delle due variabili u e v; pongasi, secondo il solito

$$\frac{dP}{du}\equiv \mathrm{p},\quad \frac{dP}{dv}\equiv \mathrm{q},\quad \frac{d^2P}{du^2}\equiv \mathrm{r},\quad \frac{d^2P}{du\,dv}\equiv \mathrm{s},\quad \frac{d^2P}{dv^2}\equiv \mathrm{t}.$$

Si supponga ora che le variabili u e v siano funzioni d'una nuova variabile indipendente t; allora il punto P descriverà sulla superficie una curva di cui vogliamo calcolare la curvatura.

Si avrà, da note regole di derivazione

$$dP\equiv \mathrm{p}du+\mathrm{q}dv \tag{1}$$

$$d^2P\equiv \mathrm{r}du^2+2\mathrm{s}du\,dv+\mathrm{t}dv^2+\mathrm{p}d^2u+\mathrm{q}d^2v. \tag{2}$$

La direzione del segmento dP determina la tangente alla curva; la formula (1) dice che essa è contenuta nel piano $\mathrm{p}.\mathrm{q}$, il quale è

perciò il piano tangente alla superficie. La direzione di questa tangente dipende da du e dv, o meglio dal loro rapporto.

Il raggio di curvatura R della curva è eguale al quadrato di dP diviso pel valore della componente di d^2P normale alla tangente. Elevando a quadrato dP si ha

$$dP^2 = \mathbf{p}^2 du^2 + 2\mathbf{p} \times \mathbf{q}\, du\, dv + \mathbf{q}^2 dv^2$$

ovvero, facendo per brevità

(3) $$E = \mathbf{p}^2, \ F = \mathbf{p} \times \mathbf{q}, \ G = \mathbf{q}^2,$$

si ha

(4) $$dP^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Così dP^2 è una funzione omogenea di secondo grado in du e dv; essa è necessariamente sempre positiva: il discriminante di questa funzione vale $EG - F^2$, ovvero indicando con p, q i valori assoluti dei segmenti **p** e **q**, si ha $E = p^2$, $F = pq \cos(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $G = q^2$; quindi $EG - F^2 = p^2q^2(1 - \cos^2 \widehat{\mathbf{pq}}) = p^2q^2 \operatorname{sen}^2 \widehat{\mathbf{p}.\mathbf{q}}$. Chiamando ω l'area del parallelogrammo $\mathbf{p}.\mathbf{q}$, cioè posto $\omega = pq \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{p}.\mathbf{q}}$, si deduce

$$\omega = \sqrt{EG - F^2}.$$

Indichiamo per un momento con a la componente di d^2P normale alla tangente dP della curva, e con b la componente di d^2P normale alla superficie. Sia θ l'angolo che la normale principale alla curva fa colla normale alla superficie, cioè l'angolo dei segmenti a e b; si avrà

$$a = \frac{b}{\cos\theta}.$$

Per calcolarci b, si consideri il volume $\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P$; in virtù della (2) si ha

(6) $$\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P = A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2$$

ove si faccia

(7) $$A = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{r}, \quad B = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{s}, \quad C = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{t}.$$

Ma il volume del parallelepipedo $\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P$ vale il prodotto dell'area base $\mathbf{p}.\mathbf{q}$, che si è chiamata ω, per la componente di d^2P normale al piano $\mathbf{p}.\mathbf{q}$, la quale componente si è chiamata b; dividendo perciò per ω si ha

$$b = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P}{\omega};$$

quindi

$$a = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P}{\omega \cos\theta};$$

e la curvatura

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{\overline{dP}^2}$$

ovvero, sostituendo:

(8) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{\omega} \frac{A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2} \frac{1}{\cos\theta}.$$

Questa formula esprime la curvatura della curva data in funzione di du e dv, o meglio del loro rapporto da cui dipende la direzione della tangente alla curva, e dell'angolo θ che la normale principale alla curva fa colla normale alla superficie. Da essa si deduce immediatamente il teorema di Meunier.

23. Supponendo $\theta = 0$, cioè che il piano osculatore alla curva sia normale alla superficie, si ha

(9) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{\omega} \frac{A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}.$$

Vogliamo ora determinare du e dv in guisa che $\frac{1}{R}$ risulti massimo o minimo. Ricorrendo alle note regole sui massimi e minimi, si ha che du e dv debbono soddisfare alle equazioni

$$\frac{A du + B dv}{E du + F dv} = \frac{B du + C dv}{F du + G dv} = \frac{A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}$$

(le quali equivalgono ad una sola equazione). Indicando con λ il valore comune di questi fratti, le equazioni precedenti si possono scrivere

$$(10) \qquad \begin{gathered} (A - \lambda E)du + (B - \lambda F)\,dv = 0 \\ (B - \lambda F)du + (C - \lambda G)dv = 0 \\ \frac{1}{R} = \frac{\lambda}{\omega}. \end{gathered}$$

Si eliminino du e dv fra le due prime equazioni; si avrà l'equazione

$$\begin{vmatrix} A - \lambda E & B - \lambda F \\ B - \lambda F & C - G\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ossia sviluppata

$$(11) \qquad (AC - B^2) - (AG + EC - 2BF)\lambda + (EG - F^2)\lambda^2 = 0$$

equazione di secondo grado in λ che ci fornisce per λ due valori. Risulta dalle cose dette che questi valori sono sempre reali, come si potrebbe pure riconoscere dall'esame dell'equazione. Questi valori di λ, sostituiti nella terza delle (10) dànno i valori delle curvature principali $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$. Si ricava con calcoli semplicissimi

$$(12) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{AG + EC - 2BF}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(13) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{AC - B^2}{(EG - F^2)^2}.$$

Eliminando invece il λ fra le due prime equazioni (10) si ha, dopo alcuni calcoli

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ E & F & G \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale determina i due rapporti $\frac{du}{dv}$ corrispondenti alle tangenti delle sezioni principali.

Se il punto considerato è un umbilico, l'equazione (9) deve dare per $\frac{1}{R}$ sempre lo stesso valore qualunque siano i valori di du e dv; perciò è necessario e sufficiente che si abbia

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{F} = \frac{C}{G}. \tag{15}$$

In questo caso l'equazione (14) diventa una identità, e risulta indeterminata la direzione delle tangenti principali.

L'equazione

$$A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0 \tag{16}$$

se $AC - B^2 < 0$, ossia se il punto è iperbolico, determina due valori di $\frac{du}{dv}$ corrispondentemente ai quali si ha $\frac{1}{R} = 0$. Alle due rette aventi queste direzioni si dà il nome di *tangenti di flesso* della superficie, perchè in generale le sezioni fatte nella superficie con piani passanti per una di esse hanno ivi un punto di flesso.

Diconsi *linee di curvatura* d'una superficie le linee della superficie che sono in ogni loro punto tangenti alle tangenti principali. La determinazione di queste linee dipende dall'integrazione della equazione differenziale (14). Per ogni punto della superficie passano due di queste linee, che si incontrano ad angolo retto.

Diconsi *linee assintotiche* della superficie quelle linee tracciate in essa che hanno per tangenti le tangenti di flesso della superficie. La loro equazione si ottiene integrando la (16). Per ogni punto iperbolico della superficie passano due di queste linee; pei punti parabolici una, e per gli ellittici nessuna.

Esercizii.

1. Se le *inverse* d'una linea piana L e del suo cerchio osculatore C sono la linea L' e il cerchio C', allora C' è il cerchio osculatore della curva L'.

2. Nel piano, la curva i cui punti distano d'una quantità costante da una curva data dicesi *parallela* ad essa. Le curve parallele hanno le stesse normali e la stessa evoluta.

3. Il raggio di curvatura della *catenaria* (Cap. II, N. 23, es. 2°) è eguale alla lunghezza della normale.

4. Il raggio di curvatura della *lemniscata* $r^2 = a^2$ ~~$\cos^2\alpha$~~ $\cos 2\alpha$ vale $\frac{a^2}{3r}$.

5. Il raggio di curvatura dell'*elica*, detto r il raggio del cerchio base, e θ l'angolo costante che la tangente all'elica fa col piano della base, vale $\frac{r}{\operatorname{sen}^2\theta}$. Il centro della sfera osculatrice coincide col centro del cerchio osculatore. Questi centri formano una nuova elica avente lo stesso asse e lo stesso passo della data. Il raggio di torsione vale $\frac{r^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\cot\theta$.

6. Se le *inverse* d'una curva a doppia curvatura L, del suo cerchio osculatore C e della sfera osculatrice S sono L', C' e S', allora C' e S' saranno rispettivamente il cerchio osculatore e la sfera osculatrice di L'. Il piano del cerchio C' è il piano osculatore alla L'.

7. Costrurre il piano osculatore e il cerchio osculatore della *lossodromia* (Cap. III, 22, es. 5°).

8. Se una superficie è data, in assi cartesiani ortogonali, da un'equazione della forma $z = f(x, y)$, dette p e q le derivate di primo ordine di z rispetto ad x e y, e r, s, t quelle del secondo ordine, il raggio di curvatura R d'una sezione normale è dato dalla formula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2}.$$

Detti R_1 e R_2 i raggi di curvatura delle sezioni principali, si ha

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r + t + rq^2 - 2spq + tp^2}{\left(1 + p^2 + q^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

L'equazione differenziale delle linee di curvatura è

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ 1 + p^2 & pq & 1 + q^2 \\ dy^2 & -dxdy & dx^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Quella delle linee assintotiche è

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0.$$

Le condizioni affinchè il punto sia un umbilico sono

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t}.$$

9. Se una superficie è data da un'equazione della forma $f(x, y, z) = 0$, dette $f_1\ f_2\ f_3,\ f_{11},\ f_{12},$ ecc. le derivate parziali del primo e secondo ordine di f rispetto ad xyz, la condizione affinchè il punto considerato sia parabolico è

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

10. Sono linee di curvatura dei *cilindri* le generatrici e le sezioni fatte con piani normali alle generatrici. Le generatrici sono anche linee assintotiche; tutti i punti sono parabolici.

11. Le linee di curvatura dei *coni* sono le generatrici e le sezioni fatte nel cono con sfere aventi per centro il vertice del cono. Le generatrici sono linee assintotiche; i punti sono parabolici.

12. Nella superficie di rivoluzione le linee di curvatura sono i meridiani e i paralleli.

CAPITOLO VII.

Figure variabili; inviluppi.

---

§ 1. Limiti di figure variabili.

1. Intenderemo sempre per *figura,* o *campo di punti,* ogni insieme di punti. Diremo *distanza d'un punto* A *da una figura* F il limite inferiore delle distanze dal punto A da tutti i punti della figura F. Essa può anche essere la minima distanza del punto A dai punti della figura, e questo avverrà certamente se i punti della figura formano un campo chiuso. La distanza del punto A dalla figura F sarà nulla quando A appartiene alla figura data, ovvero al campo limite di essa.

Una figura si può considerare o come fissa o come variabile. Diremo *limite d'una figura variabile* F il luogo dei punti le cui distanze dalla figura F hanno per limite zero.

Già si è definito (Cap. I, 2) il limite d'una retta e d'un piano; è facile lo scorgere che le definizioni allora date coincidono coll'attuale, ove la retta ed il piano si considerino come figure. Si è pure definito il limite d'un cerchio o d'una sfera variabili; si può dimostrare che anche quelle definizioni concordano coll'attuale. Invero suppongasi che il piano π, il centro C ed il raggio r d'un cerchio C variabile abbiano per limiti π_0, C_0, r_0, piano, centro, raggio d'un cerchio fisso C_0; dico che il primo cerchio (considerato come luogo di punti) ha per limite il secondo. Infatti la distanza δ d'un punto A dal cerchio variabile è espressa da $\delta = \sqrt{\overline{AH}^2 + (HC - r)^2}$, ove H sia il piede della perpendicolare abbassata da A sul piano π. Ora,

detto H_0 il piede della perpendicolare abbassata da A su π_0, il limite di H è H_0 (Cap. I, § 1°); quindi il limite di δ è $\sqrt{\overline{AH_0}^2+(H_0C_0-r_0)^2}$, ossia è la distanza δ_0 di A dal cerchio fisso C_0. Pertanto il limite di δ sarà o non sarà nullo secondochè A sta o non sta sul cerchio C_0, ossia il cerchio C_0 è il luogo dei punti, le cui distanze dal cerchio variabile C hanno per limite zero, vale a dire C_0 è il limite di C. In modo analogo si ragionerebbe per le sfere.

2. Una figura, nello spazio, si può definire come luogo dei punti P, le cui coordinate cartesiane soddisfano ad una o a più equazioni della forma $f(z,y,z)=0$, ove supporremo i primi membri funzioni continue, ed aventi derivate parziali. Sotto certe condizioni, una di quelle equazioni determina una superficie, due determinano una linea, e tre alcuni punti. La figura così determinata sarà costante o variabile secondochè le quantità $f(x, y, z)$ non dipendono, ovvero dipendono pure da altre variabili. Noi ci occuperemo brevemente delle figure date mediante equazioni, ed enuncieremo su esse le tre proposizioni seguenti:

I. Essendo $F(t)$ la figura definita dall'equazione $f(x,y,z,t)=0$, la quale figura è variabile con t, allora, col tendere di t a t_0, ogni punto della figura limite di $F(t)$ appartiene alla $F(t_0)$; viceversa ogni punto della figura $F(t_0)$ appartiene alla figura limite di $F(t)$, se, corrispondentemente ad esso, non sono nulle ad un tempo $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$.

Infatti, sia P_0 un punto della figura limite di $F(t)$, e siano x_0, y_0, z_0 le sue coordinate. Allora la distanza del punto P_0 dalla figura F avrà per limite zero; quindi anche la distanza di P_0 da qualche punto P di F avrà per limite zero, ossia il punto P di F tende a P_0. Siano x, y, z le coordinate di questo punto. Poichè esso appartiene alla figura F, sarà $f(x, y, z, t)=0$. Facciasi tendere t a t_0; x, y, z tendono a x_0, y_0, z_0 e $f(x, y, z, t)$ tende a $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$; ma siccome $f(x, y, z, t)$ è sempre nullo, sarà anche il suo limite

$f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$, ossia il punto P_0 appartiene appunto alla figura $F(t_0)$.

Viceversa, se P_0 è un punto di $F(t_0)$, cioè se $f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$, e se una delle derivate di f rispetto ad x, y, z, p. e. $\frac{df}{dx}$ non è nulla, allora l'equazione $f(x, y_0, z_0, t) = 0$ fra le due variabili x e t, che è soddisfatta da $x = x_0$ e $t = t_0$, determina x quale funzione continua di t, che per $t = t_0$ assume il valore x_0. Quindi il punto P di coordinate x, y_0, z_0 appartiene alla figura $F(t)$, perchè le sue coordinate soddisfano all'equazione $f(x, y, z, t) = 0$; inoltre col tendere di t a t_0 il punto P tende a P_0, e la distanza P_0P tende a zero. Ma la distanza di P_0 dalla F non è maggiore di P_0P; dunque la distanza del punto P_0 dalla figura $F(t)$ tende a zero, e P_0 è un punto del limite di questa figura variabile.

Se il punto P_0 appartenesse alla $F(t_0)$, ma per esso si annullassero tutte le derivate parziali di f rispetto alle sue coordinate, occorrerebbe uno studio ulteriore per riconoscere se questo punto appartenga, ovvero non alla figura limite di F.

In modo analogo si dimostrano queste proposizioni:

II. Se la figura $F(t)$ è definita dalle equazioni

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(x, y, z, t) = 0$$

i punti della figura limite di $F(t)$, ove t tenda a t_0, appartengono alla figura $F(t_0)$. Viceversa ogni punto di $F(t_0)$, pel quale non siano nulli ad un tempo i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\varphi}{dz} \end{vmatrix},$$

appartiene alla figura limite di $F(t)$.

III. Se la figura $F(t)$ è definita dalle equazioni $f(x,y,z,t) = 0$,

$\varphi(x,y,z,t)=0$, $\psi(x,y,z,t)=0$, col tendere di t a t_0, i punti limiti di $F(t)$ appartengono ad $F(t_0)$. Viceversa, ogni punto di $F(t_0)$ è un punto limite di $F(t)$, se, corrispondentemente ad esso non è nullo il determinante formato colle derivate parziali di f,φ,ψ rispetto a xyz.

3. Come applicazione delle cose precedenti, tratteremo da un nuovo punto di vista le tangenti a curve ed i piani tangenti a superficie.

Sia F una linea od una superficie, e P_0 un punto di essa. Si immagini la figura omotetica della F, con centro di omotetia in P_0 e con rapporto di omotetia r. Col crescere indefinitamente di r, questa figura omotetica tende nei casi più comuni verso un limite. Esso è in generale la tangente alla linea, od il piano tangente alla superficie F; ma può anche essere, in casi speciali, una figura più complicata, cui potremo dare in ogni caso il nome di *figura tangente* alla F nel suo punto P_0.

Sia dapprima

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

un'equazione fra le coordinate xy d'un punto P del piano, la quale rappresenti una linea. Se P_0 è un punto di questa linea, e x_0 y_0 sono le sue coordinate, sarà $f(x_0,y_0)=0$. Quindi l'equazione della linea si può pure scrivere

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=0 \tag{2}$$

ossia, sviluppando colla formula di Taylor,

$$\left(\frac{df}{dx}+\alpha\right)(x-x_0)+\left(\frac{df}{dy}+\beta\right)(y-y_0)=0, \tag{3}$$

ove α e β sono infinitesimi con $x-x_0$ e $y-y_0$. Si faccia ora la figura omotetica della linea data, con centro d'omotetia in P_0, e con rapporto r. Dette XY le coordinate dal punto Q omotetico di P,

sarà $X - x_0 = r(x - x_0)$, $Y - y_0 = r(y - y_0)$, e l'equazione della figura omotetica diventa

$$\left(\frac{df}{dx} + \alpha\right)\frac{X - x_0}{r} + \left(\frac{df}{dy} + \beta\right)\frac{Y - y_0}{r} = 0,$$

ovvero

$$(4) \qquad \left(\frac{df}{dx} + \alpha\right)(X - x_0) + \left(\frac{df}{dy} + \beta\right)(Y - y_0) = 0,$$

ove α e β sono infinitesimi con $\frac{X - x_0}{r}$ e $\frac{Y - y_0}{r}$. Si passi ora al limite, facendo crescere indefinitamente r; α e β hanno per limite zero, e l'equazione (4) ha per limite la

$$(5) \qquad \frac{df}{dx}(X - x_0) + \frac{df}{dy}(Y - y_0) = 0,$$

e, per quanto si disse, la figura definita da quest'equazione è effettivamente il limite della figura definita dall'equazione (4), se le derivate della (5) rispetto X ed Y, cioè $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ non sono nulle ad un tempo. In questa ipotesi, la (5) rappresenta una retta, che è la tangente alla curva data (V. pag. 78); dunque il limite della figura omotetica della curva data, con centro d'omotetia in un punto P_0 della curva, e con rapporto d'omotetia crescente indefinitamente, è la tangente alla curva in quel punto.

Ma se $\frac{df}{dx} = 0$ e $\frac{df}{dy} = 0$, l'equazione (5) diventa un'identità, e non rappresenta più alcuna linea. Se sono nulle le derivate parziali di f degli ordini 2°, 3°,... $(n-1)$°, ma non sono nulle tutte quelle d'ordine n, l'equazione (2), ove si sviluppi colla formula di Taylor, diventa:

$$(3') \qquad \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}(x - x_0)^n + n\frac{d^n f}{dx^{n-1}dy}(x - x_0)^{n-1}(y - y_0) + \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{d^n f}{dy^n}(y - y_0)^n\right]_\theta = 0,$$

ove le derivate parziali d'ordine n corrispondono a valori delle variabili della forma $x_0 + \theta(x - x_0)$ e $y_0 + \theta(y - y_0)$, compresi rispettivamente fra x_0 e x, y_0 e y. L'equazione della figura omotetica è in questo caso

$$(4') \quad \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}(X - x_0)^n + n\frac{d^n f}{dx^{n-1}\,dy}(X - x_0)^{n-1}(Y - y_0) + \ldots + \frac{d^n f}{dy^n}(Y - y_0)^n\right]_\theta = 0,$$

e passando al limite questa equazione diventa

$$(5') \quad \frac{d^n f}{dx^n}(X - x_0)^n + n\frac{d^n f}{dx^{n-1}\,dy}(X - x_0)^{n-1}(Y - y_0) + \ldots + \frac{d^n f}{dy^n}(Y - y_0)^n = 0,$$

ove le derivate corrispondono ai valori $x_0\,y_0$ delle variabili. È noto dalla geometria analitica che questa equazione rappresenta delle rette reali passanti per P_0, il cui numero è compreso fra 0 ed n. Per quanto si è detto, ciascheduna di queste rette appartiene effettivamente al limite della figura omotetica della curva data, se pei suoi punti non sono nulle ad un tempo le due derivate del primo membro dell'equazione (5′) rispetto ad X ed Y.

Con ragionamento analogo si dimostra che se l'equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

rappresenta nello spazio una superficie, il limite della figura omotetica di questa superficie, con centro in suo punto P_0 e con rapporto crescente indefinitamente, è la figura rappresentata dall'equazione

$$\frac{df}{dx}(X - x_0) + \frac{df}{dy}(Y - y_0) + \frac{df}{dz}(Z - z_0) = 0,$$

se $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ non sono nulle ad un tempo; cioè questo limite è il piano tangente alla superficie in P_0. Ma se le derivate parziali

di f degli ordini 1°, 2°,... $(n-1)^{mo}$ sono nulle, il limite della figura omotetica della superficie soddisfa all'equazione

$$\sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\frac{d^n f}{dx^\alpha\,dy^\beta\,dz^\gamma}\,(X-x_0)^\alpha\,(Y-y_0)^\beta\,(Z-z_0)^\gamma=0,$$

la quale rappresenta un cono di vertice P_0; ed ogni punto di questo cono apparterrà effettivamente a questa figura limite se per esso non si annullano ad un tempo le tre derivate parziali del primo membro di questa equazione rispetto a X, Y, Z.

§ 2. Inviluppi di curve nel piano.

4. Sia $F(t)$ una linea variabile in un piano fisso, la quale dipenda da una variabile numerica t. Dati a t due valori t e $t+h$, le linee $F(t)$ e $F(t+h)$ si possono incontrare in alcuni punti. Col tendere di h a zero questi punti si muovono sulla $F(t)$ e tendono in generale a posizioni limiti, che diremo punti d'incontro della linea considerata colla consecutiva, o colla infinitamente prossima. Su ogni linea del sistema possono esistere alcuni di tali punti; il loro insieme forma un luogo geometrico che diremo *inviluppo* dalle curve del sistema proposto; queste diconsi *inviluppate.*

La linea $F(t)$ sia data mediante un'equazione

(1) $$f(x, y; t)=0$$

fra le coordinate cartesiane xy d'un punto nel piano e la variabile t. La linea $F(t+h)$ sarà data dall'equazione

(2) $$f(x, y; t+h)=0$$

ed i punti comuni alle due linee sono quelli le cui coordinate soddisfano alle equazioni (1) e (2).

Al sistema di queste due equazioni si possono sostituire le

$$f(x, y; t)=0,\quad \frac{f(x, y; t+h)-f(x, y; t)}{h}=0.$$

Facciasi tendere h a zero; al limite le equazioni precedenti diventano

(3) $$f(x, y; t) = 0, \quad f'_t(x, y; t) = 0$$

e, per le cose precedentemente dimostrate, i limiti dei punti d'incontro delle $F(t)$ e $F(t+h)$ debbono soddisfare alle equazioni (3); viceversa, se un punto soddisfa a queste equazioni, esso sarà il limite di qualche punto d'incontro delle due curve date, se per esso non è nullo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{d^2f}{dx\,dt} & \frac{d^2f}{dy\,dt} \end{vmatrix}.$$

Supposto pertanto Δ non nullo, le equazioni (3) determinano in funzione di t le coordinate di punti della linea inviluppata; eliminando t fra queste equazioni, si ha l'equazione della linea cercata.

5. Una notevole proprietà di questi inviluppi è la seguente. Se P è un punto d'incontro della curva $F(t)$ sua consecutiva, le tangenti in P a questa curva e all'inviluppo, sotto certe condizioni, coincidono. Invero, il rapporto direttivo $\frac{dy}{dx}$ della tangente alla curva del sistema si otterrà dall'equazione

(α) $$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy = 0,$$

la quale si ricava differenziando la (1), considerando ivi la t come costante, supposto però che $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ non siano ad un tempo nulle. Per avere il rapporto direttivo della tangente all'inviluppo, si può risolvere la seconda delle equazioni (3) rispetto a t, il che è possibile se $\frac{d^2f}{dt^2} \gtrless 0$; poi sostituire questo valore di t nella prima delle equazioni (3); essa diventa l'equazione dell'inviluppo.

La si differenzi, ricordando che t è funzione di x ed y; si avrà

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dt}dt = 0.$$

Ma poichè $\frac{df}{dt} = 0$, in virtù delle (3), l'equazione precedente diventa identica alla (α), perciò i rappòrti $\frac{dy}{dx}$ corrispondenti all'inviluppante e all'inviluppata coincidono, e coincidono pure le tangenti a queste curve.

Come caso particolare, se le linee variabili sono rette, esse saranno le tangenti all'inviluppo.

Si è visto che il centro di curvatura d'una curva piana è il punto d'incontro di due normali successive. Quindi il luogo di questi centri di curvatura, che si è chiamato l'evoluta della curva data, non è altro che l'inviluppo delle sue normali. Si ritrova così che le normali alla curva proposta sono le tangenti alla sua evoluta.

6. Esempio. — Vogliasi determinare l'inviluppo d'una retta AB, di lunghezza costante, la quale si muove in guisa che i suoi due estremi scorrono su due assi ortogonali Ox e Oy.

Scelti per assi cartesiani gli assi Ox, Oy, detto α l'angolo che la perpendicolare abbassata da O su AB fa coll'asse delle x, e ρ la lunghezza di questa perpendicolare, l'equazione della retta AB è

(1) $$x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\alpha - \rho = 0.$$

Sia a la lunghezza costante del segmento AB. Sarà

$$\mathrm{OA} = a\,\mathrm{sen}\alpha, \quad \text{e} \quad \rho = a\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha;$$

quindi, sostituendo, l'equazione della retta indefinita AB, il cui segmento intercetto fra gli assi è a, diventa

(2) $$x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\alpha - a\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha = 0,$$

la quale non dipende che dal solo parametro α. Applicando la regola precedente, il punto di contatto della retta AB ha coordinate

che soddisfanno all'equazione (2), ed a quella che si ottiene differenziandola rispetto al parametro α, supponendo fissi x ed y; la nuova equazione è

$$(3) \qquad -x\mathrm{sen}\alpha + y\cos\alpha - a(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) = 0.$$

Ricavando da queste equazioni x ed y, si ha

$$(4) \qquad x = a\,\mathrm{sen}^3\alpha\,, \quad y = a\cos^3\alpha.$$

Così si hanno le coordinate del punto P in funzione della variabile α. Volendo l'equazione della curva descritta da P, basta eliminare α fra le due equazioni (4) il che si ottiene elevandole alla potenza $\frac{2}{3}$ e sommando.

Si ricava

$$(5) \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

e, fatti sparire gli irrazionali, si ottiene

$$(6) \qquad (x^2 + y^2 - a^2)^3 - 27a^2x^2y^2 = 0.$$

7. Applicando il metodo precedentemente spiegato per la ricerca degli inviluppi, possono presentarsi alcune singolarità che esamineremo brevemente.

Può avvenire che le due equazioni $f(x, y; t) = 0$ e $f_t'(x, y; t) = 0$, pel valore considerato di t non abbiano alcuna soluzione comune; allora conchiuderemo che non esistono punti d'intersezione della linea corrispondente al valore considerato di t colla successiva. Questo può avvenire o perchè quella linea non è incontrata dalle linee vicine, ovvero perchè, esistendo questi punti d'intersezione, essi non tendono ad alcun limite. Se ciò avviene per ogni valore di t, allora le linee date non hanno inviluppo.

Può avvenire che le equazioni precedenti $f = 0$ e $f'_t = 0$ abbiano una soluzione, ma che, per essa, il determinante denominato Δ sia nullo. In questo caso il punto, le cui coordinate soddisfanno a queste due equazioni, può alcune volte essere, ed altre volte non essere il li-

mite d'un punto d'incontro della linea considerata del sistema con una sua consecutiva. Un esempio basterà a rischiarare questo caso.

Sia l'equazione

$$y-(x-t)^3=0$$

la quale, attribuendo a t un valore qualunque, rappresenta una parabola cubica, e variando t, rappresenta infinite parabole cubiche che sono posizioni parallele d'una qualunque di esse. Annullando la derivata del primo membro rispetto a t, secondo la regola indicata, si ha

$$(x-t)^2=0$$

da cui si ricava $x=t$; e sostituendo a t questo suo valore nella prima equazione, si ha come equazione risultante $y=0$, che rappresenta l'asse delle x. Però questa linea non si può considerare come l'inviluppo delle curve del sistema, secondo la definizione data dell'inviluppo. Invero due curve qualunque $y-(x-t)^3=0$, $y-(x-t')^3=0$ non possono avere alcun punto comune, se t è diverso da t'. Però la linea così trovata riesce ancora tangente a tutte le parabole del sistema. Il determinante Δ è in questo caso nullo per ogni valore di t.

Avviene alcune volte che, per ogni valore di t, esistano dei valori di x ed y che soddisfino ad un tempo alle due equazioni $\frac{df}{dx}=0$ e $\frac{df}{dy}=0$, e che questi valori di x ed y siano funzioni continue di t (in questo caso ogni curva del sistema ha dei punti singolari). Allora si può riconoscere che sarà anche $\frac{df}{dt}=0$, e il risultato dell'eliminazione di t fra le equazioni $f=0$ e $\frac{df}{dt}=0$ contiene anche il luogo dei punti singolari delle curve del sistema. In questo caso (in cui di necessità $\Delta=0$) questi punti possono essere ovvero non i limiti dei punti d'intersezione delle curve del sistema, e il loro luogo può essere ovvero non tangente alle medesime.

Infine può avvenire che sia $\frac{d^2f}{dt^2}=0$. Si consideri p. e. l'equazione $\varphi(x, y)+t\psi(x, y)=0$, ove f e ψ sono funzioni ben definite di x ed y. Differenziandola rispetto a t si avrà $\psi(x, y)=0$, che congiunta alla precedente, dà luogo alle due equazioni $\varphi(x, y)=0$, $\psi(x, y)=0$. Queste non contengono più la variabile t; le soluzioni comuni sono indipendenti da t. I punti così determinati sono comuni a tutte le curve del sistema (le quali curve formano un fascio); in questo caso non ha più significato la ricerca se l'inviluppo sia o non tangente alle curve del sistema.

§ 3. Inviluppi di superficie.

8. Nei sistemi di superficie si hanno a considerare due sorta di inviluppi, secondochè ogni superficie del sistema dipende da una o da due variabili numeriche indipendenti.

Sia $F(t)$ una superficie variabile, la quale dipenda da un parametro t. Dati a t due valori t e $t+h$, le due superficie corrispondenti si incontrano in generale secondo una linea; tendendo h a zero, questa linea si muove sulla prima superficie e tende ad una posizione limite, che dicesi intersezione della superficie $F(t)$ colla consecutiva, ovvero la *caratteristica* della superficie.

Su ogni superficie del sistema esiste in generale una di queste linee. Il loro insieme forma una superficie cui si dà il nome di *inviluppo* delle superficie date. Queste diconsi anche inviluppate da quella.

La superficie $F(t)$ sia rappresentata dall'equazione

$$(1)\qquad f(x, y, z\,;\,t)=0$$

fra le coordinate cartesiane $x\,y\,z$ d'un punto e la variabile t. L'intersezione delle superficie $F(t)$ e $F(t+h)$ sarà data dalle equazioni $f(x, y, z;\ t)=0$ e $f(x, y, z; t+h)=0$, ovvero dalle

$$(2)\qquad f(x, y, z\,;\,t)=0,\quad \frac{f(x, y, z;\,t+h)-f(x, y, z;\,t)}{h}=0,$$

Facendo tendere h a zero, esse diventano

(3) $$f(x, y, z; t) = 0 \quad f_t'(x, y, z; t) = 0$$

e, per proposizioni dimostrate, la linea definita da queste due equazioni sarà effettivamente il limite della linea definita dalle (2), se per tutti i suoi punti non sono ad un tempo nulli i determinanti della matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ \frac{d^2f}{dt\,dx} & \frac{d^2f}{dt\,dy} & \frac{d^2f}{dt\,dz} \end{array} \right\|.$$

Se fra le equazioni (3) si elimina il parametro t, si avrà l'equazione dell' inviluppo.

Si può anche qui dimostrare che, nei casi più comuni, l'inviluppo è tangente alle superficie inviluppate.

Invero la giacitura del piano tangente alla superficie (1) è determinata dai valori di $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$; supposto che questi non siano tutti nulli. Se $\frac{d^2f}{dt^2}$ non è nullo, dalla seconda delle equazioni (3) si può ricavare t in funzione di $x\,y\,z$, e, sostituito il suo valore nella prima delle (3), si avrà l'equazione dell'inviluppo. Il piano tangente all'inviluppo è definito dalle tre derivate parziali di $f(x,y,z,t)$ rispetto ad x, y, z, ove a t si sia sostituito il suo valore; esse sono

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx}, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dy}, \quad \frac{df}{dz} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dz},$$

e poichè $\frac{df}{dt} = 0$, si riducono a $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$; quindi i piani tangenti alle due superficie coincidono.

Tre superficie del sistema $F(t_1)\,F(t_2)\,F(t_3)$ si incontrano in gene-

rale in un gruppo di punti, le cui coordinate soddisfano alle tre equazioni

$$f(x, y, z; t_1) = 0, \quad f(x, y, z; t_2) = 0, \quad f(x, y, z; t_3) = 0,$$

e quindi anche alle equazioni

$$f(x,y,z;t_1) = 0, \quad f(x,y,z;t_1 t_2) = 0, \quad f(x,y,z;t_1 t_2 t_3) = 0,$$

ove i primi membri della seconda e terza equazione sono le funzioni interpolari di primo e secondo ordine di f rispetto a t. Facendo tendere t_1 t_2 e t_3 ad uno stesso valore t, le equazioni precedenti diventano $f(x, y, z; t) = 0$, $f'_t(x, y, z; t) = 0$, $f''_t(x, y, z; t) = 0$, cui debbono soddisfare i limiti dei punti d'incontro delle tre superficie del sistema; e viceversa i punti che soddisfano a queste equazioni sono effettivamente i punti limiti, se è verificata la condizione enunciata dal Teor. III del N. 2. Questi punti si possono pure considerare come i limiti dell'intersezione della caratteristica corrispondente ad una superficie del sistema, con una superficie consecutiva.

Variando t, questi punti descrivono una curva, detta *spigolo di regresso* della superficie inviluppo. Si dimostra con ragionamento analogo ai precedenti che in generale le caratteristiche sono tangenti allo spigolo di regresso nei punti loro comuni.

Come esempio, se le superficie variabili sono i piani normali ad una curva gobba, le caratteristiche sono gli assi dei piani osculatori; lo spigolo di regresso è formato dai centri delle sfere osculatrici.

9. Sia $F(u, v)$ una superficie la quale dipenda da due variabili numeriche u e v. Le superficie $F(u, v)$ e $F(u + h, v + k)$ si incontrano in generale secondo una linea, la quale, col tendere di h e k a zero, l'una indipendentemente dall'altra, non tende verso una linea, ma verso un gruppo discreto di punti; vale a dire esiste un

gruppo di punti sulla superficie $F(u, v)$ pei quali ha per limite zero la distanza dalla curva intersezione delle $F(u, v)$ e $F(u+h, v+k)$, comunque si facciano tendere h e k a zero.

Sia

(1) $$f(x, y, z; u, v) = 0$$

l'equazione della superficie $F(u, v)$. Supponendo v costante e variabile u, i punti limiti dell'intersezione della (1) colla superficie

$$f(x, y, z; u+h, v) = 0$$

dovranno, per le cose dette soddisfare anche all'equazione $\frac{df}{du} = 0$.

Analogamente i punti limiti dell'intersezione della (1) colla

$$f(x, y, z, u, v+k)$$

debbono soddisfare alla equazione $\frac{df}{dv} = 0$. Pertanto i punti limiti dell'intersezione della superficie (1) colla superficie $f(x, y, z; u+h, v+k) = 0$, ove si facciano tendere arbitrariamente h e k a zero, debbono soddisfare, oltre alla (1), alle equazioni

(2) $$\frac{df}{du} = 0, \quad \frac{df}{dv} = 0.$$

Se fra le equazioni (1) e (2) si eliminano u e v, si avrà una equazione cui soddisfano i punti dell'inviluppo.

Si può riconoscere che l'inviluppo è generalmente tangente alle superficie inviluppate. Invero la giacitura del piano tangente alla superficie inviluppata è data dalle tre derivate parziali della (1) rispetto x, y, z, ove u e v si considerino costanti. La giacitura del piano tangente all'inviluppo è data dalle tre derivate parziali della (1) rispetto ad x, y, z, ove ad u e v siano sostituiti i loro valori che si suppongono ricavati dalle (2). Ora, poichè $\frac{df}{du} = 0$ e $\frac{df}{dv} = 0$, i valori di queste derivate parziali in ambe le ipotesi coincidono, e coincidono pure i piani tangenti.

10. Esempio. — Determinare l'inviluppo dei piani che tagliano da un dato angolo triedro un tetraedro di volume costante.

Presi per assi di riferimento gli spigoli Ox Oy Oz del triedro, la equazione

$$(1) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

rappresenta un piano che taglia sugli assi i segmenti a, b, c, e il quale determina colle faccie del triedro un volume

$$(2) \qquad V=\frac{1}{6}\Delta abc,$$

ove Δ rappresenta il volume del parallelepipedo costrutto su tre segmenti eguali all'unità di misura, e diretti secondo gli assi. Essendo V dato, delle tre variabili a, b, c che compaiono nella equazione (1) due sole sono variabili indipendenti, poichè fra esse passa la relazione (2). Pertanto, per trovare l'inviluppo dei piani (1) basterà eguagliare a zero le due derivate parziali della (1) rispetto alle due variabili indipendenti, tenendo conto che la terza è funzione delle altre due data dall'equazione (2). Questo, com'è noto, equivale ad eguagliare i rapporti delle derivate parziali delle (1) e (2) rispetto alle tre variabili a, b, c; si ha così

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{bc}=\frac{\frac{y}{b^2}}{ca}=\frac{\frac{z}{c^2}}{ab},$$

ovvero, semplificando

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c};$$

ossia, in virtù della (1), ciascheduna delle quantità $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ vale $\frac{1}{3}$, cioè

$$(3) \qquad x=\frac{a}{3}, \quad y=\frac{b}{3}, \quad z=\frac{c}{3}.$$

Queste sono le coordinate del punto di contatto del piano col suo inviluppo. Esse dicono che questo punto è il baricentro dei tre punti d'incontro del piano cogli spigoli del tetraedro.

Volendosi l'equazione della superficie inviluppo, basterà eliminare a, b, c fra le equazioni (2) e (3); si ha così

$$xyz = \frac{2}{9} \frac{V}{\Delta}.$$

§ 4. Rette e piani variabili.

11. Finora si è essenzialmente considerato come variabile un punto, il quale descrive una linea od una superficie secondochè la sua posizione è funzione di una o di due variabili numeriche. Ora potremo considerare come elementi variabili una retta od un piano, e studiare gli enti geometrici che essi generano variando. Premetteremo alcune definizioni.

Sia O un punto fisso, ed r un numero dato; ad ogni punto P dello spazio si faccia corrispondere un punto Q tale che

$$\overline{OQ} \equiv r\overline{OP}.$$

Se P descrive una figura, anche Q descriverà una figura, che dicesi *omotetica* (simile e similmente posta) della prima, con *centro di omotetia* in O, e con *rapporto di omotetia* eguale ad r.

Se P′ e Q′ è una nuova coppia di punti omologhi, sarà

$$\overline{OQ'} \equiv r\overline{OP'},$$

e sottraendo, si ottiene

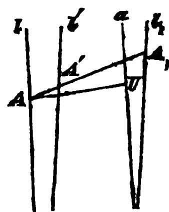
$$\overline{QQ'} \equiv r\overline{PP'};$$

ossia i segmenti omologhi PP′ e QQ′ sono paralleli, ed il loro rapporto è ancora r. Di qui si deduce che se P descrive una retta, il suo omologo Q descrive pure una retta parallela alla prima; e se P descrive un piano, il suo omologo descrive un piano parallelo al primo.

12. Sia l una retta variabile, la cui posizione è funzione d'un numero t. Dati a t i valori t e $t+h$, e dette l ed l' le posizioni corrispondenti della retta, si prenda sulla retta l un punto A, e si immagini la retta l_1 omotetica di l', con centro di omotetia in A e con rapporto di omotetia eguale ad $\frac{1}{h}$. Alla retta limite della l_1, ove si faccia tendere h a zero, daremo il nome di *retta polare* di l nel suo punto A. Se col tendere di h a zero, l' ha per limite l, la retta l_1, che è parallela ad l', ha per limite una parallela alla l, ossia la polare d'una retta in un suo punto è una parallela alla retta data.

Fra le polari d'una retta nei suoi varii punti e le derivate di punti che stanno sulla retta passano notevoli relazioni, enunciate nelle proposizioni che seguono.

Teorema I. — Se A è un punto funzione di t, avente derivata $u \equiv$ AU, e l è una retta, funzione continua di t, passante sempre per A, la polare di l nel punto A è la retta a parallela ad l passante pel punto U termine della derivata di A.



Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e dette A, l e A′, l' le posizioni corrispondenti del punto e della retta, si faccia

$$AA_1 \equiv \frac{1}{h} AA',$$

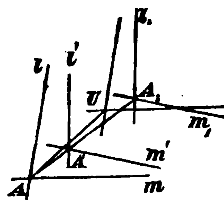
e sia l_1 la omotetica di l' con centro di omotetia in A, e con rapporto di omotetia $\frac{1}{h}$. La retta l_1 passa per A_1. Si faccia tendere h a zero; AA_1 ha per limite la derivata AU del punto A; il punto A_1 ha per limite U; e la retta l_1, che passa per A_1 ed è parallela ad l', ha per limite la retta a passante per U e parallela ad l; dunque questa è la polare di l nel suo punto A.

Teorema II. — Se A è il punto d'intersezione della retta variabile l con una linea fissa C, o con una superficie fissa S, aventi rispettivamente tangente o piano tan-

gente, e se l ha in A la polare a, la derivata del punto A ha per termine il punto d'intersezione di a colla tangente alla C, o col piano tangente alla S.

Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e dette l, A e l', A' le posizioni corrispondenti della retta e del punto, si faccia $AA_1 \equiv \frac{1}{h} AA'$, e sia l_1 l'omotetica di l' con centro A e con rapporto $\frac{1}{h}$; la retta l_1 passa per A_1. Si faccia tendere h a zero; la retta l_1 ha per limite la a polare di A; e se A sta su una curva C, la $AA'A_1$ ha per limite la tangente alla C in A; e A_1 punto d'intersezione di AA' colla l_1 ha per limite il punto U d'intersezione della tangente alla C in A colla retta a. Se A sta su d'una superficie S, la retta $AA'A_1$ è contenuta in un piano avente per limite il piano tangente, e A_1 punto d'intersezione di questo piano variabile colla l_1 ha per limite il punto d'intersezione U del piano tangente colla a. Dunque in ogni caso la AA_1 ha per limite la AU, ossia il punto A ha per derivata AU, ed il suo estremo U è il punto d'intersezione della retta a, polare di A, colla tangente alla C, o col piano tangente alla S nel punto considerato.

Teorema III. — Se A è il punto d'intersezione delle rette variabili l ed m funzioni di t, aventi polari nel punto A, questo loro punto d'intersezione ha derivata, il cui termine è il punto d'intersezione delle polari di l ed m in A.



Infatti, dette l, m, A e l', m', A' le posizioni delle rette e del punto corrispondenti ai valori t e $t+h$ della variabile, e fatto $AA_1 \equiv \frac{1}{h} AA'$, se l_1 ed m_1 sono le rette omotetiche di l' ed m' ottenute col metodo solito, le rette l_1 ed m_1 si incontrano in A_1; fatto tendere h a zero, le l_1 ed m_1 hanno per limiti le polari delle l ed m in A, ed il punto A_1 ha per limite il punto U d'intersezione di queste polari; quindi il segmento AA_1 ha per limite AU, e questa è la derivata di A;

dunque A ha derivata, ed il suo estremo U è il punto d'intersezione delle polari di l ed m in A, c. v. d.

13. Teorema IV. — Se dei punti A B C d'intersezione della retta variabile l con tre piani paralleli fissi $\alpha\,\beta\,\gamma$, due hanno derivata AU e BV, anche il terzo ha derivata CW, e gli estremi U, V, W di queste derivate sono in linea retta.

Infatti, il punto C della retta AB si può considerare come il baricentro dei punti A e B, ove ad essi si affiggano pesi convenienti m ed n; quindi, detto O un punto dello spazio, sarà

$$(m+n)\,\mathrm{OC} \equiv m\mathrm{OA} + n\mathrm{OB}.$$

Data alla variabile t un nuovo valore $t+h$, e dette l', A', B', C' le nuove posizioni della retta e dei suoi punti d'intersezione coi piani fissi, A' B' C' si possono considerare come proiezioni parallele di A B C su l'; e quindi sarà ancora

$$(m+n)\,\mathrm{OC'} \equiv m\mathrm{OA'} + n\mathrm{OB'}.$$

Sottraendo da questa equipollenza la precedente, si ha:

$$(m+n)\,\mathrm{CC'} \equiv m\mathrm{AA'} + n\mathrm{BB'},$$

e dividendo per h

$$(m+n)\frac{\mathrm{CC'}}{h} \equiv m\frac{\mathrm{AA'}}{h} + n\frac{\mathrm{BB'}}{h}.$$

Facciasi tendere h a zero; i segmenti $\frac{\mathrm{AA'}}{h}$ e $\frac{\mathrm{BB'}}{h}$ hanno per limiti le derivate AU e BV dei punti A e B; quindi anche C ha derivata CW data dalla formula

$$(m+n)\;\mathrm{CW} \equiv m\mathrm{AU} + n\mathrm{BV};$$

aggiungendo a questa equipollenza la prima, si ha

$$(m+n)\,\mathrm{OW} \equiv m\mathrm{OU} + n\mathrm{OV},$$

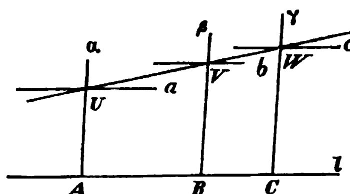
la quale dice che W si può considerare come il baricentro di U e V coi pesi *m* ed *n*, e quindi U, V, W sono in linea retta.

Dal teorema precedente si deduce che se una retta *l* ha rette polari *a* e *b* in due suoi punti A e B, essa ha retta polare *c* in ogni altro suo punto C, e la costruzione di *c* si ottiene a questo modo:

Si conducano per A, B, C tre piani paralleli, α, β, γ; il primo incontri la polare *a* in U, e il secondo la polare *b* in V; si conduca la UV, che incontri il terzo piano γ in W. La retta *c* condotta per W parallelamente ad *a* è la polare di *l* in C.

Infatti, poichè la retta *l* ha polari *a* e *b* nei punti A e B, i punti d'intersezione di questa retta coi piani α, β hanno derivata, le quali in virtù del teorema II sono AU e BV. Quindi, pel teorema precedente, anche il punto C d'intersezione della *l* col piano γ ha derivata, che è la CW, e perciò (teorema I) la retta *l* ha polare in C, che è la *c*.

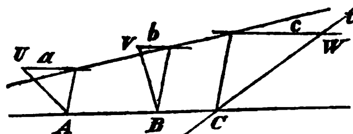
Se la retta mobile *l* sta in un piano fisso, invece di condurre i tre piani paralleli α, β, γ basta segnare le loro intersezioni con questo piano fisso, e si ha la costruzione: si conducano per A B C



tre rette parallele AU, BV, CW; le due prime incontrino nei punti U e V le polari *a* e *b*; la retta UV incontri la terza parallela in W; la retta *c* condotta per W parallelamente ad *l* è la polare cercata.

14. Le proposizioni ora dimostrate permettono di risolvere molti problemi, in cui si ha a determinare la derivata d'un punto, o la tangente ad una curva. Eccone alcuni esempi.

1° Conoscendo le derivate AU e BV dei punti A e B, determinare la derivata CW del punto C d'intersezione della retta AB con una linea o superficie fissa, della quale si conosce la tangente Ct, o il piano tangente.



Poichè sono note le derivate dei punti A e B, in virtù del teorema I, sono note le polari a e b dalla retta AB nei punti A e B; quindi la retta ABC ha pure polare c nel suo punto C, in virtù dell'ultimo teorema dimostrato; e pel teorema II, è determinata la derivata di C.

2° Conoscendo la derivata del punto P, determinare la derivata della sua proiezione Q fatta da un centro fisso O su d'un piano fisso π.

Questo problema non è che caso particolare del precedente, ove ai punti A B C sono sostituiti i punti O P Q, ed alla superficie un piano π, e si ha la costruzione seguente.

Sia PU la derivata di P; si segni la retta p passante per U e parallela ad OP (la quale retta è la polare di OPQ in P); si immaginino due piani α e β paralleli passanti per P e Q; il primo incontri p in P_1; la OP_1 incontri il piano β in Q_1; sia q la retta passante per Q, e parallela ad OPQ (la quale q è la polare di OPQ in Q); la q incontri il piano π in V. Sarà QV la derivata di Q. La costruzione precedente si può semplificare prendendo convenientemente i piani paralleli α e β, la cui giacitura è arbitraria; si può p. e. assumere per β lo stesso piano π.

3° In un piano fisso sono segnati tre punti ABC e due linee l_1 ed l_2. Da A si conduca una retta ad incontrare l_1 in P e l_2 in Q; le rette BP e CQ si incontrino in R.

Conoscendo le tangenti alle linee l_1 ed l_2, trovare la tangente alla linea che descrive R.

Poichè A è fisso, e P ha derivata nota, è determinata la derivata di Q, in virtù del problema 1°; inoltre, poichè sono note le derivate dei punti B e P della BPR, è nota la polare di questa retta in R; per la stessa ragione è nota la polare di CQR in R; e quindi, pel teorema III, è nota la derivata del punto R, e la direzione di questa derivata è la direzione della tangente alla curva che esso descrive.

4° Una retta l ruota in un piano fisso attorno ad un punto fisso A; l'angolo α che questa retta fa con una retta fissa AB è data funzione della variabile t; trovare la polare della retta in un suo punto qualunque P.

Se il punto P si muove colla retta l mantenendosi ad una distanza fissa da A, esso descrive un cerchio; e la derivata di questo punto, ossia del segmento AP, è un segmento PU normale ad AP ed in lunghezza eguale alla lunghezza di AP moltiplicata per la derivata $\frac{d\alpha}{dt}$. Per U si conduca la parallela ad AP; sarà questa la polare della retta in P.

5° In un piano fisso, due rette AP e BP ruotano intorno ai punti fissi A e B. Gli angoli α e β che esse fanno colla retta fissa AB sono date funzioni di t; trovare la derivata del punto P d'incontro delle due rette.

Pel problema che precede, sono note le polari delle rette AP e BP nel punto P; quindi (teorema III) è determinata la derivata del punto P. La costruzione è la seguente. Sia PU un segmento normale ad AP ed eguale in lunghezza ad $AP\frac{d\alpha}{dt}$; sia PV un segmento normale a BP ed eguale in lunghezza a $BP\frac{d\beta}{dt}$. Le parallele ad AP e BP condotte rispettivamente per U e V si incontrino in W. Sarà PW la derivata di P, e la sua direzione è la direzione della tangente alla curva descritta da P.

Se si fa ruotare la figura PUVW attorno a P d'un angolo retto, i segmenti PU e PV vengono a coincidere in direzione con AP e BP, e la nuova direzione di PW è normale alla curva; si deduce così una costruzione della normale alquanto più semplice di quella della tangente.

6° La retta l passa pel punto variabile P, ed è parallela ad una retta fissa m. Conoscendo la derivata di P, trovare la polare di l in un suo punto qualunque.

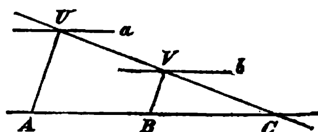
Sia PU la derivata di P; siano A e B due punti fissi su m. Si faccia $PQ \equiv AB$. Sarà Q un punto di l. Essendo O un'origine arbitraria, si avrà $PQ \equiv OQ - OP$, e quindi $OQ \equiv OP + AB$. Si derivi questa equipollenza; osservando che la derivata di OP è PU, detta QV la derivata di Q, si deduce $QV \equiv PU$; quindi la parallela alla l condotta per V è la polare cercata. Si osservi che la retta UV è appunto questa polare, ossia una retta che si sposta conservandosi sempre parallela ad una retta fissa ha la medesima polare in tutti i suoi punti.

15. Inviluppi di rette nel piano. La posizione della retta l nel piano sia funzione della variabile t. Variando t, la l assume infinite posizioni, il cui insieme determina un *inviluppo*. Per brevità diremo *punto di contatto* della retta coll'inviluppo il punto d'incontro della retta colla successiva, e diremo *normale* all'inviluppo della retta l la perpendicolare alla retta nel suo punto di contatto coll'inviluppo. Così, se le rette del sistema inviluppano una vera curva, queste espressioni riacquistano i soliti significati; ma se p. e. la retta ruota attorno ad un punto fisso, il punto di contatto della retta coll'inviluppo sarà il punto fisso, e la normale all'inviluppo sarà la perpendicolare alla retta variabile nel punto fisso. Due rette consecutive l ed l' del sistema hanno due bissetrici; ed è chiaro che, col tendere di l' ad l, una ha per limite la l stessa, e l'altra bissetrice ha per limite la normale all'inviluppo della l; quindi la normale all'inviluppo della retta l è il

limite del luogo dei punti equidistanti da due rette consecutive del sistema.

Il punto di contatto della retta l coll'inviluppo, ove siano note le polari della l nei suoi punti, si può costrurre colla seguente regola:

Se a e b sono le polari della retta l nei suoi due punti A e B, condotte per A e B due rette parallele AU e BV, che incontrino le polari a e b in U e V, la retta UV, se non è parallela nè coincide colla l, la incontra in un punto C, che è il punto d'intersezione della l colla retta successiva del sistema.



Infatti, la retta l', corrispondente al valore $t+h$ della variabile, incontri le parallele AU e BV in A′ e B′. Fatto $AA_1 \equiv \frac{1}{h} AA'$, e $BB_1 \equiv \frac{1}{h} BB'$, le rette AB, A′B′, e A_1B_1 passano per uno stesso punto. Si faccia tendere h a zero. I segmenti AA_1 e BB_1 hanno per limiti AU e BV; la A_1B_1 ha per limite la UV; ed il punto d'intersezione di AB con A′B′, cioè di AB con A_1B_1, ha per limite il punto d'incontro della AB colla UV, c. v. d.

Si osservi che la polare della l nel suo punto C coincide colla retta l stessa. Quindi, variando la retta l ed il punto corrispondente C dell'inviluppo, se C ha derivata non nulla, l'estremo di questa derivata deve trovarsi sulla stessa retta l e la derivata di C avrà la direzione della l; ossia la l è tangente alla curva descritta da C, cioè al proprio inviluppo. Si riconoscerà che C ha una derivata non nulla se p. e. si riconosce che la retta UVC ha nel punto C una polare distinta da essa, poichè in questo caso la derivata di C

è data dal teorema III del N. 2. Adunque, sotto le condizioni enunciate, le rette l sono tangenti al loro inviluppo nei punti corrispondenti.

16. Molte questioni riferentisi agli inviluppi si possono trattare con considerazioni geometriche.

È noto che se in un piano si hanno due figure ABC.... e A′B′C′.... eguali e dello stesso senso, e se due segmenti corrispondenti AB e A′B′ non sono equipollenti, esiste nel piano un punto S tale che le figure SABC.... e SA′B′C′.... sono ancora eguali e dello stesso senso. Il punto S dista egualmente da tutte le coppie di punti omologhi, come AA′, BB′, ..., e quindi si trova sulla perpendicolare nel punto medio di ogni segmento che unisce una coppia di punti omologhi; lo stesso punto dista pure egualmente da ogni coppia di rette omologhe, come AB e A′B′, e quindi giace sulla bissetrice esterna dell'angolo di due rette omologhe. Se si fa ruotare la figura ABC.... attorno ad S finchè A venga in A′, la prima figura viene a coincidere colla seconda.

Suppongasi ora che una figura piana, di forma invariabile, si muova nel proprio piano, e che la sua posizione sia funzione d'un numero t; attribuiti a t due valori t e $t+h$, e detto S il punto attorno a cui ruotando la figura, essa passa dalla prima alla seconda posizione, avviene nei casi più comuni, che, col tendere di h a zero, il punto S tenda ad un limite O. A questo punto O si da il nome di *centro d'istantanea rotazione* della figura.

Noi ci assicureremo dell'esistenza di questo punto O, e lo determineremo, se due rette passanti per S tendono verso posizioni limiti non parallele nè coincidenti, e l'intersezione di queste rette limiti è il punto O. Così noi sappiamo che se AA′ sono due posizioni d'uno stesso punto della figura mobile, la perpendicolare nel punto medio di AA′ passa per S, e il limite di questa perpendicolare è la normale alla linea descritta da A. Sappiamo pure che la bissetrice esterna di due posizioni d'una stessa retta della figura passa per S, ed il limite di questa bissetrice è la normale all'inviluppo della retta.

Adunque, se si conoscono le normali alle linee descritte da due punti della figura, ovvero le normali al luogo d'un punto, e all'inviluppo d'una retta, od infine le normali all'inviluppo di due rette, e queste normali non sono nè parallele nè coincidenti, il loro punto d'incontro è il centro O d'istantanea rotazione.

Così determinato il punto O, la normale al luogo descritto da ogni punto della figura, come pure la normale all'inviluppo d'ogni retta della figura passa per O.

17. Ecco alcune applicazioni del centro d'istantanea rotazione per determinare tangenti a curve, e punti di inviluppi.

1° Un segmento AB di lunghezza costante si muove in guisa che i suoi estremi scorrono su due linee date, di cui si conoscono le tangenti; determinare la tangente alla linea descritta da un punto C invariabilmente connesso con A e B, e il punto di contatto della retta AB col suo inviluppo.

Il centro d'istantanea rotazione della figura ABC è il punto S d'incontro delle normali alle linee descritte da A e B; quindi la SC è la normale alla linea descritta da C, e la proiezione di S su AB è il punto di contatto di AB col suo inviluppo.

La seconda questione fu già trattata al N. 8. Si dimostra che, se A e B scorrono su due assi $0x$ ed $0y$, ogni punto C connesso invariabilmente con A e B descrive un'ellisse.

2° Un segmento AB di lunghezza costante si muove nel piano. Conoscendo la tangente alla linea descritta da A, ed il punto di contatto della AB col suo inviluppo, determinare la tangente alla linea descritta da B.

La normale al luogo del punto A, e la normale all'inviluppo della retta AB, cioè la normale ad AB nel suo punto di contatto coll'inviluppo, si incontrano nel centro d'istantanea rotazione S; SB è la normale al luogo del punto B.

Come caso speciale, se la retta AB passa per un punto fisso O,

il punto B descrive la concoide della linea descritta da A, e si ottiene così la costruzione della tangente alla concoide già data al Cap. II, 19.

3° Due rette a e b variabili comprendono un angolo costante. Conoscendo i punti di contatto di queste rette col loro inviluppo, determinare la tangente alla linea descritta dal loro punto d'incontro M.

Le normali agli inviluppi delle rette a e b si incontrano nel centro d'istantanea rotazione S; sarà SM la normale al luogo del punto M. (V. Cap. II, eserc. 9).

Come caso speciale, se l'angolo compreso fra le rette date è retto, e se una di queste rette OM passa per un punto fisso O, mentre l'altra MP inviluppa una curva, e P è il punto di contatto, il luogo del punto M è la *podaria* della curva inviluppata dalla MP, con polo in O. Formato il rettangolo OMPS, la diagonale MS è la normale alla podaria. (V. Cap. II, eserc. 7).

4° Due rette OM ed MP comprendono un angolo retto; la retta OM passa pel punto fisso O, e il punto M descrive una curva di cui si conosce la tangente. Determinare il punto P di contatto della MP col suo inviluppo.

La normale ad OM in O e la normale alla curva descritta da M si incontrano nel centro d'istantanea rotazione S; il punto cercato P è la proiezione di S sulla MP.

Si osservi che l'inviluppo delle rette MP ha per podaria la curva descritta da M.

18. Un numero U può essere funzione della posizione d'una retta l nel piano. Così son funzioni della posizione di l i numeri che misurano le sue distanze da punti fissi, ed ogni funzione analitica di tali distanze. Le rette del piano per cui la funzione U ha un valore costante inviluppano in generale una linea. Per determinare il punto di contatto delle rette del sistema coll'inviluppo può servire il seguente

TEOREMA. — Se $h_1\ h_2 \dots h_n$ sono, in un piano fisso, le distanze della retta variabile l dai punti fissi $A_1\ A_2 \dots A_n$, ed U è funzione di queste distanze

$$U = f(h_1,\ h_2,\ \dots\ h_n),$$

la retta l tocca l'inviluppo delle rette per cui U ha uno stesso valore nel punto che è la proiezione sulla l del baricentro dei punti $A_1\ A_2 \dots A_n$, cui siano affissi i numeri $\frac{df}{dh_1}, \frac{df}{dh_2}, \dots \frac{df}{dh_n}$.

Infatti siano l ed l' due posizioni della retta; $\Delta h_1, \Delta h_2 \dots \Delta h_n$ e ΔU le differenze dei valori delle distanze $h_1\ h_2 \dots h_n$, e della loro funzione U corrispondenti alle due posizioni della retta.

Sarà

$$\Delta U = \left(\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1\right) \Delta h_1 + \left(\frac{df}{dh_2} + \epsilon_2\right) \Delta h_2 + \dots + \left(\frac{df}{dh_n} + \epsilon_n\right) \Delta h_n.$$

Sia S il baricentro dei punti $A_1\ A_2 \dots A_n$ cui siano affissi i numeri $\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1, \dots \frac{df}{dh_n} + \epsilon_n$. Indicando con p la distanza di l da S sarà

$$\left(\frac{df}{dh_1} + \frac{df}{dh_2} + \dots + \frac{df}{dh_n} + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n\right) p =$$
$$= \left(\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1\right) h_1 + \left(\frac{df}{dh_2} + \epsilon_2\right) h_2 + \dots + \left(\frac{df}{dh_n} + \epsilon_n\right) h_n.$$

Sostituendo alla l la l', e sottraendo le formule ottenute, si ha

$$\Sigma \left(\frac{df}{dh_i} + \epsilon_i\right) \Delta p = \Sigma \left(\frac{df}{dh_i} + \epsilon_i\right) \Delta h_i;$$

e quindi

$$\Delta U = \Sigma \left(\frac{df}{dh_i} + \epsilon_i\right) \Delta p.$$

Se ora le rette l ed l' sono tali che $\Delta U = 0$, dovrà pure essere $\Delta p = 0$, e le rette l ed l' distano egualmente da S. Si faccia tendere l' verso l. Le quantità Δh_1, Δh_2, ... ϵ_1, ϵ_2, ... hanno per limite zero; il punto S baricentro di $A_1 \ldots A_n$ colle masse $\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1$, ... $\frac{df}{dh_n} + \epsilon_n$, ha per limite il punto O baricentro di A_1 .... A_n colle masse $\frac{df}{dh_1}$, ... $\frac{df}{dh_n}$. Pertanto un punto S equidistante dalle rette ll' ha per limite il punto O; dunque la perpendicolare abbassata da O sulla l è la normale all'inviluppo della l, ed il suo piede è il punto di contatto della l col suo inviluppo.

19. Superficie rigate. Una retta l mobile nello spazio, la cui posizione dipenda dai valori d'una variabile numerica t, descrive una superficie rigata.

Il piano tangente alla superficie in un punto A d'una generatrice l è il piano che passa per A e per la polare a di l nel suo punto A. Invero, sia A' un altro punto della superficie, per cui passa la generatrice l', corrispondente al valore $t + h$ della variabile numerica t. Detta l_1 la retta omotetica di l' con centro di omotetia in A, e con rapporto $\frac{1}{h}$, i punti AA' e le rette $l' l_1$ giacciono in uno stesso piano. Facciasi tendere A' verso A; la retta l_1 ha per limite la retta a, polare di l in A; e il piano A A' $l' l_1$ ha per limite il piano A a. Pertanto per ogni retta che unisce il punto A con un altro punto A' della superficie si può condurre un piano A $l' l_1$ che, col tendere di A' verso A, ha per limite il piano A a; dunque (pag. 117) questo è il piano tangente alla superficie in A.

Se la retta mobile l ha le polari a e b in due suoi punti A e B, essa avrà polare in ogni altro suo punto, e quindi risulta determinato il piano tangente in ogni punto della generatrice. Per quanto si è detto, la costruzione del piano tangente in un terzo punto C è la seguente. Si conducano per A e B due piani paralleli α e β che incontrino le polari a e b in U e V; la retta UV incontra il piano γ condotto per C parallelamente ai piani α e β in W; per W si

conduca la retta c parallela ad l; questa sarà la polare di b in C, e il piano Cc è il piano tangente cercato.

Se le tre parallele l, a, b giacciono in uno stesso piano, giacerà pure in esso la polare c in ogni punto C; perciò i piani tangenti in tutti i punti della generatrice coincidono. Se invece essi non giacciono in uno stesso piano, allora varia il piano tangente in esso; e siccome il piano tangente si ottiene dal punto C mediante proiezioni e sezioni, si conchiude che mentre il punto di contatto descrive sulla generatrice una punteggiata, il piano tangente corrispondente descrive un fascio di piani proiettivo a quella punteggiata.

20. Piani variabili. Le cose dette per le rette variabili si possono applicare con leggere modificazioni ai piani variabili. Noi ci limiteremo a pochi cenni.

Sia π un piano, la cui posizione dipenda da una variabile numerica t. Sia A un punto di π. Si attribuisca alla variabile t un nuovo valore $t+h$, e sia π' il piano corrispondente; si immagini il piano omotetico di π' con centro d'omotetia in A e con rapporto d'omotetia $\frac{1}{h}$. Col tendere di h a zero questo piano tende in generale ad una posizione limite α, parallela a π; al piano α daremo il nome di piano polare di π nel suo punto A.

Si dimostrano con ragionamenti analoghi ai precedenti le proposizioni che seguono.

Se AU è la derivata del punto A e α il piano polare di π in A, il piano α contiene il punto U. Questa proprietà permette di costrurre il piano polare α ove si conosca la derivata del punto A; ovvero di costrurre la derivata del punto A conoscendo il piano polare α, e la direzione della derivata di A. Esso permette pure di costrurre la derivata del punto A d'incontro d'un piano π e d'una retta l, ove in quel punto si conoscano il piano polare α e la retta polare a del piano e retta date; l'estremo della derivata di A è il punto $a\alpha$. Infine, se π, ρ, σ sono tre piani variabili e se α, β, γ sono i loro piani polari nel loro punto comune A, l'estremo della derivata di A è il punto $\alpha\beta\gamma$.

Se α, β, γ sono i piani polari del piano variabile π in tre suoi punti A B C non in linea retta, il piano polare di π in questo suo punto D si costruisce a questo modo: si conducano per A B C D quattro rette parallele $h\,k\,l\,m$; le prime tre incontrino rispettivamente i piani $\alpha\,\beta\,\gamma$ in H K L; il piano H K L incontri la m in M; il piano δ condotto per M, parallelamente a π è il piano cercato. La retta intersezione del piano H K L col piano π è il limite dell'intersezione del piano π con un piano successivo del sistema, ossia è la caratteristica dell'inviluppo dei piani π.

Si consideri infine il sistema di piani per cui ha un valore costante una funzione $f(h_1, h_2, \dots h_n)$ delle loro distanze $h_1\,h_2 \dots h_n$ da n punti fissi $A_1\,A_2 \dots A_n$. Il punto di contatto d'un piano del sistema col suo inviluppo è la proiezione ortogonale su quel piano del baricentro dei punti dati, cui siano affissi i numeri $\frac{df}{dh_1}, \frac{df}{dh_2}, \dots \frac{df}{dh_n}$. I piani per cui sono costanti due funzioni analitiche f e φ delle loro distanze da n punti dati si possono, in generale, far corrispondere univocamente ad un numero. La caratteristica d'uno dei piani del sistema è la congiungente le proiezioni su quel piano dei due baricentri dei punti dati, cui si immaginano affissi numeri rispettivamente eguali alle derivate parziali di f e φ rispetto a queste distanze.

Esercizii.

1. Dai punti della curva di equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$ si abbassino le perpendicolari sugli assi e si segni la retta che passa pei piedi di queste perpendicolari. L'inviluppo di queste rette ha per equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{m+1}} = 1.$$

2. L'inviluppo dei cerchi aventi per diametri i raggi vettori condotti da un punto fisso O ai punti d'una curva C è la podaria di C rispetto ad O.

3. L'inviluppo dei cerchi il cui centro sta su d'una curva fissa C, e che pas-

sano per un punto fisso O è la podaria, rispetto ad O, della curva omotetica di C, con centro di omotetia in O, e con rapporto di omotetia eguale a 2.

4. L'inviluppo delle curve di equazione $y^3 - (x - t)^2 = 0$, ove varii t, è l'asse delle x. Le tangenti alle curve del sistema nei punti dell'inviluppo sono normali all'inviluppo.

5. L'evoluta della parabola $y^2 = 2px$ ha per equazione $27py^2 = 8(x - p)^3$.

6. L'evoluta della curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ è $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

7. Dai punti d'un piano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ si abbassano le perpendicolari sugli assi; l'inviluppo dei piani passanti pei piedi di queste perpendicolari ha per equazione $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$.

8. Dai punti della superficie di equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1$ si abbassino le perpendicolari sugli assi; l'inviluppo dei piani passanti pei piedi di queste perpendicolari ha per equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{m}{m+1}} = 1.$$

9. Dai punti della superficie data nell'esercizio precedente si abbassino le perpendicolari sui piani coordinati; l'inviluppo dei piani passanti pei piedi di queste perpendicolari ha per equazione

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{z}{2c}\right)^{\frac{m}{m+1}} = 1.$$

10. Ad ogni punto (x, y, z) della superficie $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1$ facciasi corrispondere la superficie di equazione $\left(\frac{X}{x}\right)^p + \left(\frac{Y}{y}\right)^p + \left(\frac{Z}{z}\right)^p = 1$. L'inviluppo di queste superficie ha per equazione

$$\left(\frac{X}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{Y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{Z}{c}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1.$$

INDICE

ERRATA-CORRIGE ✓

Pag.	32	linea	21	il punto P ha per limite OP_0,	il punto P ha per limite P_0.
»	47	»	7	$(b+b)$	$b+\Delta b$.
»	49	»	5	$=f'(t)+$.	$=f(t)+hf'(t)+$
»	52	»	1	$-\frac{dy}{dv}$	$\frac{dy}{dv}$
»	57	»	14	un sol numero t,	un sol punto P,
»	63	»	15	$\epsilon . P_0A$	ϵ
»	—	»	18	ϵ	$\epsilon . P_0A$
»	—	»	22	$+\epsilon$	$+\epsilon . P_0A$
»	78	»	ultima	$\frac{df}{dx}(Y-y)$	$\frac{df}{dy}(Y-y)$.
»	90	»	19	$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e-^{\frac{x}{a}}\right)$	$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$
»	117	»	18-19	gli angoli	l'angolo
»	124	»	18	fatto	fatta
»	301 (0)	es.	4	$a^2\cos^2\alpha$	$a^2\cos 2\alpha$. ✓

